الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة محمد بوضياف المسيلة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

دروس حول:

الاقتصاد القياسي2
محاضرات وتمارين

مقدمة لطلبة السنة الثالثة ليسانس LMD في العلوم الاقتصادية
تخصص: اقتصاد كمي

إعداد الدكتور: بن البار امحمد

السنة الجامعية: 2020/2019

الفصل الأول:

التعدد (الازدواج) الخطي

اولا: طبيعـة التعـدد (الازدواج) الخطـي: إحـدى فرضـيات النمـوذج الكلاسـيكي للانحـدار المتعـدد هـي أن لمصفوفة المشـاهدات عن المتغيرات المستقلة رتبة تامة k، هذه الفرضية سمحت لنا باستنتاج مقدر $\hat{}$ لـ ، خطي وغير متحيز وذي تشتت أصغر، وذلك انطلاقا من المعادلة $(X'X)\hat{} = X'Y$. فإذا رفعت هذه الفرضية، فإن $(X'X)$ لن تكون ذات رتبة تامة، أي تكون أقل من رتبة (X) (أو (X')) أي أقل من k. ومع أن $(X'X)$ هي مصفوفة ذات حجم $(k \times k)$ بالتالي تكون مصفوفة شاذة (محددها معدوم)، ومنه فإن $(X'X)^{-1}$ تكون غير موجودة وبالتـالي المعادلـة $(X'X)\hat{} = X'Y$ لا تقبـل إذن حـلا وحيـدا (عـدد لا نهـائي مـن الحلـول). يضـع النمـوذج الكلاسيكي للانحدار المتعدد $Y = X \ \ + £$ المتغير التابع $Y_i : i = 1....n$ في علاقة خطية مع المتغيرات المستقلة $X_{i1}, X_{i2},......X_{ik} : i = 1....n$، وكذلك مع الأخطاء العشوائية $£_i : i = 1....n$، فإذا كانت بالإضافة إلى ذلك رتبة X أقل من أو تساوي k فإن هذا يترجم بارتباط خطي بين أعمدة المصفوفة X.

وبعبارة أخرى يشير مشكل التعدد الخطي إلى وجود ارتباط خطي بين عدد من المتغيرات المفسِّرة، ومن تم فإن هذا المشكل لا يوجد في حالة الانحدار البسيط. نسمي X_j العمود رقم j لـ X حيث $X = [X_1, X_2,....X_j.....X_k]$.

- قولنا أن رتبة X أقل من k يعني أنه يوجد شعاع C حيث : $C' = [C_1, C_2,....C_j.....C_k] \neq 0$

حيث : $C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_kX_k = 0$

- العلاقة الأخيرة تعبر عن وجود علاقة خطية بين المتغيرات المستقلة.

ثانيا: أسباب التعدد الخطي وآثاره :

ينشأ التعدد الخطي من عدة أسباب منها ما يلي :

- ❖ اتجاه المتغيرات الاقتصادية معا للتغير مع مرور الزمن: فبمرور الزمن سوف تتزايد المتغيرات الاقتصادية التالية معا: الدخل، الاستهلاك، الادخار، الاستثمار، المستوى العام للأسعار والعمالة، وحيث أن هناك ارتباط بين هذه المتغيرات فإن التعدد الخطي سوف يتحقق.
- ❖ استخدام متغيرات مستقلة ذات فترة إبطاء في المعادلة المراد تقديرها: فالدخل في الفترة الزمنية الحالية يتحدد جزئيا بواسطة قيمته في الفترة الزمنية السابقة، وحيث أن هناك ارتباط بين القيم المتتالية لمتغير ما فإن التعدد الخطي سوف يتحقق.

وفي وجود التعدد الخطي فإنه سوف يترتب عنه:

- زيادة التباين والتباين المشترك للمقدرات بدرجة كبيرة دون التأثير على التنبؤات المستمدة من الانحدار.
- القيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون غير محددة وغير دقيقة.
- الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون كبيرة جدا.

ثالثا: اختبارات اكتشاف التعدد الخطي:

تعتمد درجة الخطورة لأثر التعدد الخطي على درجة الارتباط الجزئي، ومعامل الارتباط الكلي (أو معامل التحديد المضاعف)، ومنه يمكن القول بأن كلا من الأخطاء المعيارية ومعاملات الارتباط الجزئية $r_{xi,xj}$، معامل التحديد المضاعف R^2، يمكنها أن تستعمل لاختبار التعدد الخطي، لكن كل معيار من هذه المعايير الثلاثة المذكورة ليس بمؤشر على وجود التعدد الخطي بمفرده، وذلك لأن القيم العالية للأخطاء المعيارية لا تظهر دائما، بسبب التعدد الخطي، وإنما يمكن أن تظهر لأسباب أخرى، كما أن الارتباطات العالية فيما بين المتغيرات المستقلة لا تؤثر بالضرورة على قيم المقدرات $\hat{\beta}_j$، ومنه ليست هذه الأخيرة بمعيار مناسب لقياس واكتشاف التعدد الخطي بمفردها، وبالمقابل يمكن لقيمة معامل التحديد المضاعف R^2 أن تكون عالية بالمقارنة مع $r_{xi,xj}$.

ورغم ذلك، من المحتمل أن تحتوي نتائجنا على إشارات خاطئة أو على أخطاء معيارية كبيرة، ومع كل هذا يمكن القول بأن توفيق المعايير الثلاثة، أعلاه يساعدنا على اكتشاف التعدد الخطي.

1- طريقة التحليل الترافدي لـ Frisch :

تكمن هذه الطريقة في انحدار المتغير التابع على كل متغير مستقل على حدا، ومنه نحصل على كل الانحدارات الأولية، ثم نختار الانحدار الأولي الذي يعطي النتائج الأكثر مصداقية، ثم نضيف تدريجيا متغيرات أخرى ونختبر آثارها على كل من المعالم الفردية (أخطائها المعيارية، قيمة R^2) ويكون المتغير المضاف للانحدار ذا معنوية إذا تحققت فيه الشروط التالية :

- إذا حَسَّن المتغير المستقل الجديد من R^2 بدون أن يجعل المعالم الفردية مرفوضة بطريقة خاطئة، نحتفظ بهذا المتغير ونعتبره كمتغير مستقل.
- إذا لم يُحَسِّن المتغير الجديد من العلاقة ويؤثر على قيم المعالم الفردية، نعتبره مرفوضا ونحذفه من الانحدار.
- إذا أثر المتغير الجديد بشكل واضح على إشارات وقيم المعالم المقدرة، نعتبره متغيرا مُفَسِّرا، فإذا تأثرت المعالم الفردية بالطريقة التي تصبح فيها غير مقبولة على أساس الاعتبارات النظرية المعروفة مسبقا، فإنه يمكننا القول بأن هذا مؤشر على وجود التعدد الخطي بشكل معقد، يكون هذا المتغير مُهما، لكن بسبب الارتباطات الخطية مع المتغيرات المستقلة الأخرى، يكون أثره غير مقدر وغير معروف إحصائيا بواسطة المربعات الصغرى العادية.

إن التحليل الترافدي لـ Frisch ينص على تقدير كل الانحدارات الممكنة ما بين المتغيرات الموجودة بالعلاقة المدروسة، آخذين كل متغير، بالترتيب، كمتغير تابع واعتبار كل الانحدارات الممكنة لكل متغير في بقية

المتغيرات، والتي ندخلها تدريجيا في التحليل، ومن الواضح أن التحليل الترافدي يتطلب منا حسابات كثيرة، ومنه تكون المقارنات ما بين النتائج معقدة أكثر.

2- قياس التعدد الخطي أو شرط الأعداد Condition numbers:

من خلال النموذج التالي : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i : \quad i = 1.........n$

يكون لدينا :

$$\boxed{\begin{cases} Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum X_{i1}^2\left(1 - R_1^2\right)} \\ Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum X_{i2}^2\left(1 - R_2^2\right)} \\ Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2 R_1^2}{\sum X_{i1} X_{i2}\left(1 - R_1^2\right)} \end{cases}}$$

حيث أن R_1^2 هو مربع معامل الارتباط المتعدد ما بين المتغيرين المستقلين X_{i1} و X_{i2}، بينما R_2^2 هو ما بين $X_{i1}X_{i2}$، وهما في الأخير متساويان، أما عند توسيع النموذج إلى k متغير مستقل ($k>2$) يصبح R_j^2 على أنه مربع معامل الارتباط المتعدد ما بين المتغير المستقل X_{ij} وبقية المغيرات المستقلة الأخرى، ومنه يمكننا استنتاج قانون عام لتباين المقدرات الفردية لشعاع معالم النموذج كما يلي :

$$Var\left(\hat{\beta}_j\right) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum X_{ij}^2\left(1 - R_j^2\right)}, \quad j = 1.......k$$

وتكون قيمة $Var\left(\hat{\beta}_j\right)$ كبيرة كلما كانت: σ_ε^2 كبيرة؛ $\sum X_{ij}^2$ صغيرة، R_j^2 كبيرة.

ومنه نُعرِّف مقياسا جديد يسمى "معامل تضخم التباين" Variance Inflation Factor (V.I.F) "، ومقياسا آخر يسمى "شرط العدد Condition number"، وهما مقياسان يحددان درجة التعدد الخطي.

- ويعرف معامل تضخم التباين كما يلي : $V.I.F\left(\hat{\beta}_j\right) = \dfrac{1}{1 - R_j^2}$

- وبناءا على هذا التعريف نستطيع كتابة: $Var\left(\hat{\beta}_j\right) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum X_{ij}^2} \times V.I.F\left(\hat{\beta}_j\right), \quad j = 1.......k$

أي أن : $V.I.F\left(\hat{\beta}_j\right) = \dfrac{\sum X_{ij}^2}{\sigma_\varepsilon^2} \times Var\left(\hat{\beta}_j\right) \qquad j = 1.......k$

انطلاقا من الانتقادات الموجهة لمعامل الارتباط، يكون مقياس *VIF* غير كافٍ لتحديد التعدد الخطي، ومنه نذكر مقياس شرط الأعداد المذكور من طرف Welsch, 1980 ، والذي يقيس حساسية مقدرات الانحدار للتغيرات الصغيرة في التباينات، ويعرف شرط الأعداد على أنه الجذر التربيعي لأكبر قيمة مقسمة على أصغر قيمة للقيم المميزة للمصفوفة $(X'X)$ وهو على الشكل : $K(X) = \dfrac{\sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}}}$

فكلما كانت القيمة أعلاه أقرب إلى الواحد، كلما كان الشرط أفضل لعدم جدية التعدد الخطي، ومع هذا، فإن المقياسين المذكورين أعلاه ليسا كاملين، حيث القانون الخاص بـ *VIF* ينظر إلى الارتباطات من خلال المتغيرات المستقلة فقط، وهذا ليس بالعامل الوحيد، كما أن شرط العدد يمكن أن يتغير بإعادة تحويل المتغيرات المستقلة، والتي ليست دائمة صحيحة، ويصلح المقياسان للاستعمال عند حذف بعض المتغيرات وفرض قيود

على المعالم فقط في الحالات التي يكون فيها $R_j^2 \approx 1$، أو لما تكون القيمة المميزة الصغيرة a_{min} أقرب من الصفر. نقدر النموذج في هذه الحالة تبعا لبعض القيود المفروضة على معالمه، ويقترح Theil مقياسا أخر لقياس درجة الارتباط فيما بين المتغيرات ومنه درجة التعدد الخطي على الشكل :

$$m = R^2 - \sum_{j=1}^{k}\left(R^2 - R_{-j}^2\right)$$

حيث أن R^2 هو معامل التحديد المضاعف المعروف من قبل، أما R_{-j}^2 فهو مربع معامل الارتباط المتعدد من انحدار y (المركزة) في $X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$. مع حذف x_j، لكن إحدى عيوب هذه الطريقة هي أن m يمكن أن تكون سالبة مما يجعل التحليل أصعب، وهناك من يقترح طرقا معينة لحل مشكلة التعدد الخطي كإضافة حد ثابت لتباينات مقدرات المعالم قبل حل المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى.

3- طريقة Farrar-Glauber:

لاكتشاف ظاهرة التعدد الخطي يتبع Farrar-Glauber الخطوات التالية:

❖ أولا : حساب محدد مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} & r_{X_1X_3} & \cdots & r_{X_1X_k} \\ r_{X_2X_1} & 1 & r_{X_2X_3} & \cdots & r_{X_2X_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{X_kX_k} & r_{X_kX_2} & r_{X_kX_3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

عندما تكون قيمة المحدد تقترب من الصفر، فإن هناك دليل على وجود تعدد خطي.

❖ ثانيا : نستعمل اختبار ¡ ^{2} وذلك بوضع الفرضيات التالية :

H_0 : D = 1 (استقلال خطي)

H_1 : D < 1 (ارتباط خطي)

إحصائية Farrar-Glauber (القيمة المحسوبة) تعرف كما يلي:

$$¡^{2*} = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+7)\right].\ln D$$

حيث n هو حجم العينة، k هو عدد المتغيرات المفسرة في النموذج و ln هو اللوغاريتم النبيري.

فإذا كانت قيمة ¡ ^{2} * أكبر تماما من القيمة المجدولة لتوزيع ¡ ^{2} بدرجة حرية $\frac{1}{2}k(k+1)$ و نسبة معنوية ~، نقبل H_1 أي هناك تعدد خطي.

رابعا: الحلول المقترحة للتعدد الخطي :

عند وجود التعدد الخطي، فإن الحلول تكون مُعتمِدة على إمكانية إيجاد مصادر أخرى للبيانات وعلى أهمية العوامل التي تسببت في ظهورها، ثم على الهدف الذي من أجله نقوم بتقدير الدالة تحت الدراسة، فإذا لم يؤثر التعدد الخطي بشكل فعلي على مقدرات النموذج، يقترح بعض باحثي القياس الاقتصادي إهمال وجوده في النموذج، حيث يمكن تحاشي التعدد الخطي بتوسيع حجم العينة، فمثلا يمكن تحويل البيانات السنوية إلى بيانات

موسمية أو شهرية إن أمكن ذلك، كما يمكن التخلص من التعدد الخطي بإسقاط (حذف) المتغير المسبب لهذا المشكل لكن هذه العملية يمكن أن تخلق مشاكل أخرى، وهناك من يقترح إدخال معلومات إضافية للنموذج.

إن وجود التعدد الخطي يجعل من الصعب فصل آثار المتغيرات المختلفة، ومنه نحتاج إلى معلومات خاصة تساعدنا على فصل أثر كل متغير لوحده، ويكون ذلك عن طريق فرض قيود على بعض المعالم بناءا على المعلومات المسبقة للنكظرية الاقتصادية.

تمارين:

التمرين الأول:

1- ما نقصد بمشكلة التعدد الخطي؟ وما هي طبيعته؟ وما هي انواعة؟
2- كيف يمكن معالجة البيانات للتخلص من مشكلة التعدد الخطي ؟

التمرين الثاني:

ليكن لدينا البيانات التالية:

Y	1	2	3	4	5
X1	10	15	18	24	30
X2	50	75	90	120	150

o المطلوب:

1- تأكد من وجود أو عدم وجود التعدد(التداخل) الخطي ينX1و X2؟
2- إذا كانت الاجابة بنعم، فما هو نوع التعدد(التداخل) الخطي؟
3- هل يمكن تقدير معادلة الانحدار بين Y والمتغيرين المستقلين X1و X2 ؟ وضح ذلك.

التمرين الثالث:

ليكن لدينا البيانات التالية:

Y	1	2	3	4	5
X1	10	0	20	30	40
X2	10	20	40	10	20

o المطلوب:

1- تأكد من وجود أو عدم وجود التعدد(التداخل) الخطي ينX1و X2؟
2- إذا كانت الإجابة بنعم، فما هو نوع التعدد(التداخل) الخطي؟
3- هل يمكن تقدير معادلة الانحدار بين Y والمتغيرين المستقلين X1و X2 ؟ وضح ذلك.

التمرين الرابع:

قام احد الباحثين بدراسة دالة الطلب على سلعة معينة، فوجد أن هناك عاملين أساسيين يؤثران على فيها: سعر السلعة، وأسعار السلع الأخرى، وكما هو موضح في الجدول التالي:

Y(الكمية المطلوبة)	1.5	6.5	7.5	9	10.5	12	12	13.5	15	15
X1	5.6	7	11.2	12.6	16.8	19.6	22.4	25.2	28	33.6
X2	14	11.2	8.4	9.8	7	7	5.6	2.8	2.8	1.4

o المطلوب:

1- در معادلة الانحدار بين Y و المتغيرين المستقلين X1 و X2 بالاستعانة بالبرنامج الإحصائي **Eviews**.

2- إختبر وجود أو عدم وجود مشكلة التعدد الخطي باستخدام طريقة **Farrar-Glauber**، واختبار **Klein Test**.

3- في حالة وجود التعدد الخطي، فكيف يمكن معالجته؟

التمرين الخامس:

اذا كانت لديك مصفوفة الارتباطات التاليةR:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

وتوفرت لدينا المعطيات التالية:

$r_{12} = 0.7894$, $r_{13} = 0.8823$, $r_{23} = 0.9566$.

$n = 16$, $k = 4$

- المطلوب:

- اختبر وجود مشكلة التعدد الخطي باستخدام اختبار كاي تربيع χ^2 .

الفصل الثاني:
الارتباط الذاتي بين الأخطاء

اولا: طبيعة الارتباط الذاتي بين الأخطاء: من بين الافتراضات الكلاسيكية التي وضعناها من قبل لتقدير معالم نموذج الانحدار، هو استقلال القيمة المقدرة لحد الخطأ في فترة زمنية معينة عن القيمة المقدرة لحد الخطأ في فترة زمنية سابقة لها. أي :

$$Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0,\quad \forall i\neq j$$

وإذا تم إسقاط هذا الافتراض فإن ذلك يدل على وجود ما يسمى بالارتباط الذاتي حيث أن مصفوفة التباينات-التباينات المشتركة $E(\varepsilon\varepsilon')=\Omega_\varepsilon\neq\sigma_\varepsilon^2 I$ لا تحتوي على الصفر خارج القطر الأول و كنتيجة لذلك:

$$\Omega_{\hat\beta}=E((\hat\beta-\beta)(\hat\beta-\beta)')=(X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1}$$

$$=(X'X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon X)(X'X)^{-1}\neq\sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$$

يتم استعمال طريقة المربعات الصغرى المعممة GLS لتقدير شعاع المعالم β والذي ينبغي أن يكون لديه نفس الخصائص الإحصائية لأي مقدر:

$$\hat\beta=(X'\Omega_\varepsilon^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon^{-1}Y)$$

$$\Omega_{\hat\beta}=(X'\Omega_\varepsilon^{-1}X)^{-1}$$

عندما تكون الفرضيات الأساسية للنموذج محققة، فإن:

$$\hat\beta_{GLS}=(X'\Omega_\varepsilon^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon^{-1}Y)=\left(X'\left(\sigma_\varepsilon^2 I\right)^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\left(\sigma_\varepsilon^2 I\right)^{-1}Y\right)=(X'X)^{-1}(X'Y)=\hat\beta_{OLS}$$

في هذه الحالة، المقدر المتحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى المعممة هي نفسه المقدر بطريقة المربعات الصغرى العادية.

ثانيا: أسبابه وطرق كشفه

ينشأ الارتباط الذاتي من عدة أسباب منها :

- إهمال بعض المتغيرات التفسيرية في النموذج المراد تقديره.
- الصياغة الرياضية الخاطئة للنموذج.
- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية.

أما وجوده يؤثر سلبا على نتائج المربعات الصغرى العادية من حيث :

- القيم المقدرة للمعاملات سوف تكون غير متحيزة.
- تباين القيم المقدرة لمعاملات النموذج سوف لا يكون أقل ما يمكن.

لذلك تستعمل عدة اختبارات للكشف على هذا الاختلال منها ما يلي :

1- اختبار دربين واتسون Durbin-Watson test (1950 et 1951) :

يعتبر اختبار Durbin-Watson من أهم الاختبارات الشائعة المستخدمة في اكتشاف الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى حسب الشكل:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t \, , \quad u_t \sim N(0,\sigma_u^2)$$

ويهدف إلى اختبار الفرضيات التالية :

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

لاختبار فرضية العدم H_0 يجب حساب إحصائية دربين واتسون DW:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_{t-1}^2}$$

يمكن كتابة الإحصائية أيضا بدلالة مقدر معامل الارتباط ρ ، لدينا:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 + \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2 - 2\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_{t-1}^2}$$

نلاحظ أن: $\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2 \cong \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2$ إذن:

$$DW \cong \frac{2\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_{t-1}^2} - \frac{2\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_{t-1}^2}$$

نعلم أن:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_{t-1}^2}$$

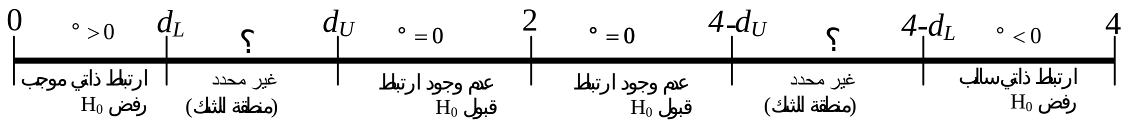
ومنه:

$$DW \cong 2(1-\hat{\rho})$$

حيث أن الإحصائية DW تمثل القيمة المحسوبة للاختبار وتأخذ قيمها بين 0 و4. ويتضح من المعادلة السابقة أنه إذا كانت $\rho = 0$ فإن $DW \cong 2$.

ويوضح الشكل التالي قيم d (القيم المجدولة للاختبار)، التي تشير إلى وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى موجب أو سالب، أو تجعل نتيجة الاختبار غير محددة، وتوجد قيم كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ d (d_L, d_U) في الجدول الإحصائي لتوزيع دربين واتسون.

شكل رقم (08) : مناطق القبول والرفض لاختبار Durbin-Watson



بالاعتماد على الشكل رقم (1) يمكن أن تُستخرج نتيجة اختبار DW كالتالي:

- ❖ إذا كانت $DW<d_L$ أو $DW>4-d_L$ يرفض H_0 .
- ❖ إذا كانت $4-d_U>DW>d_U$ يقبل H_0 .
- ❖ إذا كانت $4-d_U\le DW\le 4-d_L$ أو $d_L\le DW\le d_U$ تكون نتيجة الاختبار غير محددة، ومن ثم يجب إضافة بيانات أكثر.

لا يمكن استعمال هذا الاختبار إلا في ظل الشروط التالية:

- ❖ يجب أن يكون النموذج متضمنا للمعلم الثابت β_0
- ❖ النموذج المقدر لا يتضمن متغيرات تابعة ذات فترات إبطاء كمتغيرات مستقلةلا يختبر دربين واتسون إلا الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى.

2- اختبار Breusch-Godfrey

يرتكز هذا الاختبار على مضاعف لاغرانج و الذي يسمح باختبار وجود ارتباط ذاتي من درجة أكبر من الواحد. نموذج الانحدار الذاتي للأخطاء من الدرجة p يكتب على الشكل التالي:

$$\varepsilon_t=\rho_1\varepsilon_{t-1}+\rho_2\varepsilon_{t-2}+\ldots+\rho_p\varepsilon_{t-p}+u_t$$

ليكن النموذج العام حيث أن الأخطاء مرتبطة ذاتيا:

$$Y_t=\beta_0+\beta_1X_{t1}+\ldots+\beta_kX_{tk}+\rho_1\varepsilon_{t-1}+\rho_2\varepsilon_{t-2}+\ldots+\rho_p\varepsilon_{t-p}+u_t$$

هناك ثلاث خطوات لإجراء هذا الاختبار:

- ❖ تقدير النموذج العام بطريقة المربعات الصغرى ثم حساب البواقي ε_t
- ❖ تقدير المعادلة الوسيطية التالية:

$$\varepsilon_t=\beta_0+\beta_1X_{t1}+\ldots+\beta_kX_{tk}+\rho_1\varepsilon_{t-1}+\rho_2\varepsilon_{t-2}+\ldots+\rho_p\varepsilon_{t-p}+u_t$$

ثم حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2. نذكر أن باستعمال هذه المعادلة، سنفقد p مشاهدة.

- ❖ فرضية استقلالية الأخطاء H_0 التي ينبغي اختبارها هي:

$$H_0:\rho_1=\rho_2=\ldots=\rho_p=0$$

الإحصائية $LM=(n-p)\times R^2$ تتبع توزيع χ^2 بدرجة حرية p . إذا كان $(n-p)\times R^2$ أكبر من $\chi^2(p)$ (القيمة الحرجة لتوزيع χ^2 بنسبة معنوية α)، فإننا نرفض H_0 فرضية استقلالية الأخطاء.

ثالثا: طرق التقدير في حالة وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء:

إذا أخذنا بعين الاعتبار الارتباط الذاتي بين الأخطاء، النموذج الخطي العام يكتب على الشكل التالي:

$$Y = X \quad + \varepsilon$$

مع: $$\varepsilon_t = \rho\,\varepsilon_{t-1} + u_t,\ |\rho| < 1$$

تعبر هذه المعادلة عن سيرورة الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى *AR(1)* الذي يحقق الفرضيات التالية:

$$E(u_t) = 0$$
$$E(u_t^2) = \sigma_u^2,\ \forall t$$
$$\operatorname{cov}(u_t, u_{t'}) = 0,\ \forall t \neq t'$$
$$\operatorname{cov}(u_t, \varepsilon_{t-1}) = 0,\ \forall t$$

من نموذج الانحدار الذاتي، نعوض ε_{t-1} بما يساويه، نحصل على:

$$\varepsilon_t = \rho(\rho\varepsilon_{t-2} + u_{t-1}) + u_t = \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t$$

نعوض ε_{t-2} بما يساويها، نحصل أيضا:

$$\varepsilon_t = \rho^2(\rho\varepsilon_{t-3} + u_{t-2}) + \rho u_{t-1} + u_t = \rho^3\varepsilon_{t-3} + \rho^2 u_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t$$

في الأخير، لدينا العادلة:

$$\varepsilon_t = u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} + \ldots$$

تؤول هذه السيرورة إلى الصفر لأن: $|\rho| < 1$.

نقوم إذن بدراسة خصائص ε_t.

لدينا $E(\varepsilon_t) = 0$ وبتربيع الخطأ ε_t، نحصل على:

$$\varepsilon_t^2 = u_t^2 + \rho^2 u_{t-1}^2 + \rho^4 u_{t-2}^2 + \rho^6 u_{t-3}^2 + \ldots$$

ثم بإدخال التوقع الرياضي على الطرفين:

$$E(\varepsilon_t^2) = E(u_t^2) + \rho^2 E(u_{t-1}^2) + \rho^4 E(u_{t-2}^2) + \rho^6 E(u_{t-3}^2) + \ldots$$

نعلم أن: $$E(u_t^2) = E(u_{t-1}^2) = E(u_{t-2}^2) = E(u_{t-3}^2) = \ldots = \sigma_u^2,\ \forall t$$

ومنه: $$\operatorname{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = (1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \ldots)\sigma_u^2$$

إذن: $$\operatorname{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\sigma_u^2}{1 - \rho^2}$$

وباستعمال خصائص u_t، نقوم بحساب التباين المشترك للخطأ ε_t، لدينا:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} &= (u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} + \ldots)(u_{t-1} + \rho u_{t-2} + \rho^2 u_{t-3} + \rho^3 u_{t-4} + \ldots)\\ &= \rho u_{t-1}^2 + \rho^3 u_{t-2}^2 + \rho^5 u_{t-3}^2 + \ldots\end{aligned}$$

بإدخال التوقع الرياضي على الطرفين، نحصل في الأخير على:

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = \frac{\rho\sigma_u^2}{1 - \rho^2}$$

نفس الشيء مع: $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})$

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})=\frac{\rho^2\sigma_u^2}{1-\rho^2}$$

في الحالة العامة، سيكون لدينا:

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-i})=\frac{\rho^i\sigma_u^2}{1-\rho^2}$$

مصفوفة التباين–التباين المشترك للأخطاء في حالة وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى تكتب على الشكل التالي:

$$\Omega_\varepsilon=E(\varepsilon\varepsilon')=\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}1&\rho&\rho^2&\dots&\rho^{n-1}\\ \rho&1&\rho&\dots&\rho^{n-2}\\ \rho^2&\rho&1&\dots&\rho^{n-3}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ \rho^{n-1}&\rho^{n-2}&\rho^{n-3}&\dots&1\end{pmatrix} \text{ مع } |\rho|<1$$

نذكر أن مقدر طريقة المربعات الصغرى يكتب على الصيغة التالية:

$$\hat\beta=(X'\Omega_\varepsilon^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon^{-1}Y)$$

و هذا يعني أن معكوس مصفوفة التباين–التباين المشترك للأخطاء معرف كما يلي:

$$\Omega_\varepsilon^{-1}=\frac{1}{\sigma_u^2}\begin{pmatrix}1&-\rho&0&0&\dots&\dots&0\\ -\rho&1+\rho^2&-\rho&0&\dots&\dots&0\\ 0&-\rho&1+\rho^2&-\rho&\dots&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&\dots&\dots&\dots&\dots&1+\rho^2&-\rho\\ 0&\dots&\dots&\dots&0&-\rho&1\end{pmatrix}$$

من الملاحظ أن قيمتي ρ و σ_u^2 غير معروفتين وهذا يعني أنه ينبغي إيجاد مقدر لكل منهما وذلك بالبحث عن مصفوفة M حيث النموذج $MY=MX\beta+M\varepsilon$ يحقق جميع الفرضيات الأساسية.

لدينا: $E((M\varepsilon)(M\varepsilon)')=E(M\varepsilon\varepsilon'M')=ME(\varepsilon\varepsilon')M'=M\Omega_\varepsilon M'=\sigma_\varepsilon^2 I$

إذن نحدد المقدر BLUE كما يلي: $\hat\beta=\left(X'M'MX\right)^{-1}X'M'MY$

و بالنتيجة التالية: $M'M=\lambda\Omega_\varepsilon^{-1}=\sigma_u^2\Omega_\varepsilon^{-1}\quad\forall\lambda$

نحصل على المصفوفة:

$$\underset{(n-1,n)}{M}=\begin{pmatrix}-\rho&1&0&0&\dots&0\\ 0&-\rho&1&0&\dots&0\\ 0&0&-\rho&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&0&0&-\rho&1\end{pmatrix}$$

التي تعتبر كاستنتاج للمصفوفة:

$$M'M=\begin{pmatrix}\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1+\rho^2 & -\rho\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\rho & 1\end{pmatrix}$$

و هي نفسها المصفوفة $\sigma_u^2\Omega_\varepsilon^{-1}$. وعليه تؤول طريقة المربعات الصغرى المعممة إلى طريقة المربعات الصغرى العادية، حيث يتم تقدير النموذج العام المصحح من الارتباط الذاتي عن طريق تحويل المتغيرات عن طريق شبه الفروقات من الدرجة الأولى، لدينا:

$$MY=\begin{pmatrix}Y_2-\rho Y_1\\ Y_3-\rho Y_2\\ \dots\\ Y_n-\rho Y_{n-1}\end{pmatrix} \quad و \quad MX_j=\begin{pmatrix}X_{2,j}-\rho X_{1,j}\\ X_{3,j}-\rho X_{2,j}\\ \dots\\ X_{n,j}-\rho X_{n-1,j}\end{pmatrix}$$

حيث: $j=1,2,\dots,k$

عند استخدام شبه الفروقات، نفقد المشاهدة الأولى لكل متغير ولتجنب ضياعها، نضع:

$$Y_1^*=Y_1\sqrt{1-\rho^2}$$
$$X_{1,j}^*=X_{1,j}\sqrt{1-\rho^2}$$

يكتب النموذج المصحح على النحو التالي:

$$Y_t-\rho Y_{t-1}={}_0(1-\rho)+{}_1(X_{t1}-\rho X_{t-1,1})+{}_2(X_{t2}-\rho X_{t-1,2})+\dots+{}_k(X_{tk}-\rho X_{t-1,k})+\varepsilon_t-\rho\varepsilon_{t-1}$$

كما ذكرنا، يتم تقدير النموذج الأخير بطريقة المربعات الصغرى العادية. المشكل الأساسي الذي نواجهه يتمثل في تقدير معامل الارتباط الذاتي بين الأخطاء من الدرجة الأولى. هناك إذن عدة طرق للتقدير منها ما يلي :

1. تقدير ρ عن طريق إحصائية Durbin-Watson:

<u>الخطوة الأولى</u>: تقدير ρ انطلاقا من إحصائية DW، حيث: $\hat{\rho}\cong 1-DW/2$

<u>الخطوة الثانية</u>: تقدير النموذج التالي بعد إجراء التعديلات على المشاهدات بحساب شبه الفروقات:

$$Y_t-\hat{\rho}Y_{t-1}={}_0(1-\hat{\rho})+{}_1(X_{t1}-\hat{\rho}X_{t-1,1})+{}_2(X_{t2}-\hat{\rho}X_{t-1,2})+\dots+{}_k(X_{tk}-\hat{\rho}X_{t-1,k})+u_t$$

أي: $$Y_t^*={}_0^*+{}_1X_{t1}^*+{}_2X_{t2}^*+\dots+{}_kX_{tk}^*+u_t$$

المعالم المقدرة بطريقة المربعات الصغرى هي: $\hat{}_1,\dots,\hat{}_k$ و $\hat{}_0^*=\hat{}_0(1-\hat{\rho})$.

2. تقدير ρ بطريقة Theil-Nagar:

اقترح Theil و Nagar تقديرا لـ ρ من خلال العلاقة التالية :

$$\hat{\rho}=\frac{n^2[1-(DW/2)]+(k+1)^2}{n^2-(k+1)^2}$$

حيث k هي عدد المتغيرات المستقلة. نستخدم نفس الخطوات لتقدير معالم النموذج بطريقة المربعات الصغرى.

3. طريقة Cochrane-Orcutt

اقترح Cochrane و Orcutt تقديرا بإعطاء قيمة ابتدائية لـ ρ بواسطة القيم المقدرة لحد الخطأ.

الخطوة الأولى: إعطاء قيمة ابتدائية لمعامل الارتباط وذلك بتقنية تقدير مباشرة: $\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$ ، فليكن:

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}$$

الخطوة الثانية: تقدير النموذج التالي بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t - \hat{\rho}_0 Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}_0) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho}_0 X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho}_0 X_{t-1,2}) + \ldots + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho}_0 X_{t-1,k}) + u_t$$

المعالم المقدرة هي: $\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$ و $\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0(1-\hat{\rho})$.

الخطوة الثالثة: إعادة تقدير ρ ببواقي تقدير جديدة $\hat{\varepsilon}_t^1$ حيث:

$$\hat{\varepsilon}_t^{(1)} = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{t1} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{tk}$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_t^{(1)} \hat{\varepsilon}_{t-1}^{(1)}}{\sum (\hat{\varepsilon}_t^{(1)})^2}$$

الخطوة الرابعة: تقدير النموذج التالي على المتغيرات ذات شبه الفروقات:

$$Y_t - \hat{\rho}_1 Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}_1) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho}_1 X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho}_1 X_{t-1,2}) + \ldots + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho}_1 X_{t-1,k}) + u_t$$ ثم

نعيد تقدير ρ مرة أخرى ببواقي تقدير جديدة $\hat{\varepsilon}_t^{(2)}$ فنحصل على تقدير لـ $\hat{\rho}_2$. نكرر العملية مرات أخرى إلى غاية سكون مقدرات النموذج (عادة نكرر العملية ثلاث أو أربع مرات).

4. طريقة Hildreth-Lu:

–الخطوة الأولى: تحديد نوع الارتباط (موجب أو سالب) بواسطة إحصائية Durbin-Watson.

–الخطوة الثانية: نحدد مجالا للقيم الممكنة لمعامل الارتباط ρ . نختار قيما تنتمي إلى المجال [0,1] إذا كان المعامل موجبا و قيما تنتمي إلى هذا المجال [−1,0] إذا كان سالبا.على سبيل المثال يكون لدينا $\rho = \{0.1; 0.2; \ldots; 0.9; 1\}$ إذا اعتبرنا أن معامل الارتباط موجب فيتم اختيار درجة سلم 0.1 أو 0.01 ومع كل قيمة يتم تقدير النموذج:

$$Y_t - \hat{\rho}_i Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}_i) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho}_i X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho}_i X_{t-1,2}) + \ldots + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho}_i X_{t-1,k}) + u_t$$

ونأخذ قيمة ρ القيمة التي عندها يكون مجموع مربعات البواقي $\sum_t \hat{u}_t^2$ أصغر ما يمكن.

تمارين:

التمرين الأول:

1- ما نعني الارتباط الذاتي ؟ وما هي طبيعته ؟

2- ميز بين الارتباط الذاتي الموجب والارتباط السالب مع الرسم البياني؟

3- ميز بين اختبار داربن –واتسون(DW) من طرف واحد ومن طرفين؟ موضحا ذلك بشكل تخطيطي.

4- ميز بين طريقة الفرق الأول والفرق العام للتخلص من الارتباط الذاتي ؟

5- كيف يمكن معالجة مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى باستخدام طريقة التحويل؟

6- اذكر أهم الانتقادات التي وجهت إلى اختبار داربن –واتسون(DW)، وما هو البديل لذلك؟

التمرين الثاني: بافتراض أننا حصلنا على البواقي لإحدى علاقات النظرية الاقتصادية الموضحة في الجدول التالي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ei	-2.6	-2.1	-2.6	-1.3	0.6	-0.1	0.8	2.4	2.1	2.8

المطلوب:

1- اختبر وجود أو عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى بين قيم المتغير العشوائي بالاستعانة بـ:

- الشكل الانتشاري.
- طريقة كوكران- اوركت **Cochrane-Orcutt**.

التمرين الثالث: بافتراض دالة الاستهلاك الإجمالي Ci الذي تعتمد على إجمالي الدخل المتاح Yi، ويكون الاستهلاك في التخلف الزمني هو C_{i-1} وتأخذ الصيغة التالية:

$$C_i = \sim + BY_i + \text{¢}C_{i-1} + u_i$$

❖ بافتراض انه لدينا بيانات لسلسلة زمنية (n=117) وباستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية(OLS) تم تقدير العلاقة السابقة وتحصلنا على النتائج التالية:

$$\hat{C}_i = 1.74 + 0.098\,Y_i + 0.897\,C_{i-1}$$
$$se(.)\quad (0.0364)\quad (0.0399)\quad (0.04335)$$
$$R^2 = 0.977$$
$$DW = 1.559$$

المطلوب:

- اختبر وجود أو عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، عند مستوى معنوية **α=5%.**

التمرين الرابع: باستخدام بيانات الإنفاق الاستهلاكي الشخصي Ci، والدخل الشخصي المتاح للإنفاق Yi (مليون دينار) لأحد الدول كما هو موضح في الجدول التالي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ci	70	105	90	95	110	115	120	140	155	150	160	180	200	215	230
Yi	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360

المطلوب:

1- إجراء انحدار Ci على Yi، بالاستعانة بالبرنامج الإحصائي **Eviews**.

2- اختبر وجود أو عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى عند مستوى معنوية α=5% باستخدام:

- اختبار إحصائية DW. [علما أن : d_u =1.36, d_L=1.08].

التمرين الخامس: باستخدام البيانات الآتية المدونة في الجدول التالي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Xi	7	9	8	12	12	10	8	5	7	12
Yi	4	6	5	9	8	7	4	4	5	8

المطلوب:

1- إجراء انحدار Yi على Xi، بالاستعانة بالبرنامج الإحصائي **Eviews**.

2- اختبر وجود أو عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى ستخدام اختبار إحصائية DW عند مستوى معنوية α=5% وفي اختبار من طرفين. [علما أن : d_u =1.32 , d_L=0.88].

التمرين السادس: البيانات التالية لدولة ما مبيعات مادة معينة Yi، بدلالة السعر Xi1، والدخل Xi2 المدونة في الجدول التالي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Yi	12	14	18	20	24	27	29.5	30.5	33.5	35.5	38	42	44	46.5	39.5
Xi1	7	6	7	6	5	4	4	6	3	3	3	1	2	1	2
Xi2	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90

المطلوب:

1- إجراء انحدار Xi1 وXi2 على Yi، بالاستعانة بالبرنامج الإحصائي **Eviews**.

2- اختبر وجود او عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى عند مستوى معنوية α=5% باستخدام:

- اختبار إحصائية DW . [علما أن : d_u =1.54 , d_L=0.95].

الفصل الثالث:
عدم تجانس تباين الأخطاء

اولا: طبيعة عدم ثبات تباين الأخطاء

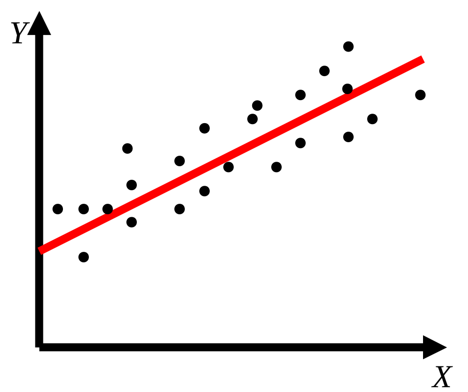
إذا كانت فرضية تجانس التباين غير محققة، فإن مصفوفة التباين–التباين المشترك للأخطاء تعرف كما يلي:

$$\Omega_{\varepsilon} = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2_{\varepsilon,n} \end{pmatrix} \neq \sigma^2_{\varepsilon} I_n$$

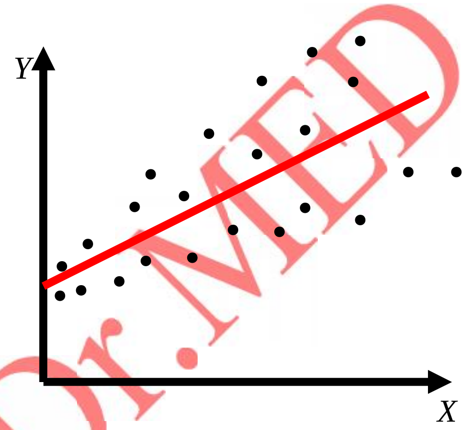
من الملاحظ أن تباينات الأخطاء ليست ثابتة على القطر الأول وبالتالي تباين الأخطاء مرتبط بقيم المتغير المستقل .

يوضح الشكل رقم (09) العلاقة المتوقعة بين المتغيرين التابع Y والمستقل X في حالة ثبات تباين الخطأ، ويلاحظ من خلال هذا الشكل أن تباين حد الخطأ لا يعتمد على قيم X.

شكل رقم (01)
ثبات تباين الخطأ في نموذج الانحدار البسيط



شكل رقم (02)
عدم ثبات تباين الخطأ في نموذج الانحدار البسيط



ويوضح الشكل حالة عدم ثبات التباين لحد الخطأ $E(\varepsilon_i^2) \neq \sigma^2, \forall i$ ، حيث نلاحظ أن زيادة X سوف تؤدي إلى زيادة تباين حد الخطأ، ويرتبط هذا المشكل ببيانات المقطع المستعرض Cross-section date أكثر من بيانات السلسلة الزمنية Cross-series date، حيث أن الأولى عبارة عن بيانات يتم تجميعها عن متغير ما في لحظة زمنية معينة (مثال: بيانات الإنفاق الاستهلاكي عند مستويات مختلفة لدخول الأفراد لسنة 2005)، أما بيانات السلسلة الزمنية فيتم تجميعها عن متغير ما عبر فترة زمنية معينة. وهناك عدة أسباب لعدم تجانس تباين حد

الخطأ منها تحسن أساليب تجميع البيانات، وهذا يُقلل من الأخطاء المرتكبة في القياس، ومن ثم سوف يقل تباين حد الخطأ.

ثانيا: أسباب عدم ثبات تباين الأخطاء وآثاره:

ويترتب على مشكلة عدم ثبات التباين عددا من الآثار تتمثل في:

1. تبقى المعالم المقدرة باستخدام المربعات الصغرى متصفة بعدم التحيز والاتساق، ولكنها تفقد صفة الكفاءة.
2. تصبح التباينات المقدرة وكذلك التباينات المشتركة Covariances الخاصة بالمعالم المقدرة متحيزة وغير متسقة، ولذا فإن اختبارات الفرضيات لا تصبح دقيقة أو ملائمة.
3. بالرغم من أن التنبؤات القائمة على أساس المعالم المقدرة باستخدام المربعات الصغرى العادية تظل غير متحيزة، إلا أنها تفقد صفة الكفاءة، وهو ما يعني أنها تكون أقل مصداقية من التنبؤات الأخرى.

في حالة عدم تجانس تباين الأخطاء، مقدر BLUE بطريقة المربعات الصغرى المعممة يكتب كما يلي:

$$\hat{} = (X'\Omega_{£}^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_{£}^{-1}Y)$$
$$\Omega_{\hat{}} = (X'\Omega_{£}^{-1}X)^{-1}$$

عكس تصحيح النموذج من الارتباط الذاتي، لا توجد منهجية موحدة للتصحيح من عدم ثبات تباين الأخطاء، فالطرق مختلفة مرتبطة بسبب وجود هذا المشكل.

ثالثا: اختبارات اكتشاف عدم تباين الخطأ :

يتم اكتشاف عدم ثبات تباين الأخطاء بواسطة عدة اختبارات منها ما يلي:

1. اختبار Goldfeld-Quandt:

بافتراض النموذج التالي $Y_i = \ _0 + \ _1X_i + £_i, i = 1,...,n$، يمكن تبيان كيفية استخدام اختبار Goldfeld–Quandt في اكتشاف عدم ثبات تباين الخطأ من خلال الخطوات التالية:

- ترتيب مشاهدات X ترتيبا تصاعديا.
- استبعاد المشاهدات الوسطى لكل من X و Y ،ثم تكوين مجموعتين من المشاهدات بحيث يكون لكل مجموعة على حدا معادلة خاصة بها كما يلي :
  1. المجموعة الأولى: وتتمثل في المشاهدات الخاصة بكل من X و Y الواردة قبل المشاهدات التي تم استبعادها، والمعادلة الخاصة بهذه المجموعة هي : $Y_{1i} = a + bX_{1i} + £_{1i}$
  2. المجموعة الثانية: وتتمثل في المشاهدات الخاصة بكل من X و Y الواردة بعد المشاهدات التي تم استبعادها، والمعادلة الخاصة بهذه المجموعة هي: $Y_{2i} = c + dX_{2i} + £_{2i}$
- تقدير معاملات المعادلتين السابقتين باستعمال المربعات الصغرى :

$$\hat{Y}_{1i} = \hat{a} + \hat{b}X_{1i}$$
$$Y_{2i} = \hat{c} + \hat{d}X_{2i}$$

- الحصول على القيم المقدرة لحد الخطأ:

$$\hat{£}_{1i} = Y_{1i} - \hat{Y}_{1i}$$
$$\hat{£}_{2i} = Y_{2i} - \hat{Y}_{2i}$$

- إيجاد القيمة المحسوبة لإحصائية F كما يلي:

$$F = \frac{\sum \hat{£}_{2i}^{2}}{\sum \hat{£}_{1i}^{2}}$$

- إيجاد درجات الحرية: $DF = \frac{n - m - 2(k+1)}{2}$

حيث k : عدد المتغيرات المستقلة، m : عدد المشاهدات المستبعدة.

- إيجاد القيمة المجدولة لإحصائية F عند درجات الحرية لكل من البسط والمقام، ومستوى معنوية معين.
- مقارنة بين القيم المحسوبة لإحصائية F والقيمة المجدولة لها :
  - فإذا كانت F المحسوبة أكبر من F المجدولة، نقبل الفرضية البديلة أي فرضية عدم ثبات تباين الأخطاء.
  - أما إذا كانت F المحسوبة أقل من F المجدولة، يتم قبول فرضية العدم.

لاحظ أن اختبار Goldfeld–Quandt لا يمكن تطبيقه إلا في حالة ما إذا كانت إحدى المتغيرات المستقلة هي المسببة في وجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ.

2. اختبار White:

اقترح White (1980) اختبارا يعتمد على العلاقة بين مربعات البواقي و جميع المتغيرات المستقلة و كذا مربعاتها. يمكن إبراز خطوات هذا الاختبار كما يلي:

- تقدير النموذج العام $Y = X\ \ + £$ بطريقة المربعات الصغرى العادية ثم حساب مربعات البواقي $\hat{£}_t^2$.
- تقدير المعادلة الوسيطية التالية:

$$\hat{£}_t^2 = \ _0 + \ _1 X_{t1} + \sim_1 X_{t1}^2 + \ldots + \ _k X_{tk} + \sim_k X_{tk}^2 + u_t$$

ثم حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2.

- فرضية ثبات تباين الأخطاء H_0 التي ينبغي اختبارها هي:

$$H_0 : \ _0 = \sim_1 = \ _1 = \ldots = \sim_k = \ _k = 0$$

إحصائية مضاعف لاغرانج $LM = n \times R^2$ تتبع توزيع $¡^2$ بدرجة حرية $2k$. إذا كان $n \times R^2$ أكبر من $¡^2(2k)$ (القيمة الحرجة لتوزيع $¡^2$ بنسبة معنوية $\sim$)، فإننا نرفض H_0 أي إذا كان هناك على الأقل معامل واحد من معاملات المعادلة الوسيطية يختلف معنويا عن الصفر فإن تباين الأخطاء غير متجانس.

3. اختبار ثبات التباين الشرطي للأخطاء ARCH–LM:

تسمح نماذج ARCH[1] بنمذجة المتغيرات المالية التي تحتوي على تباين شرطي غير ثابت للأخطاء العشوائية حيث أن التطاير الشرطي الذي يعبر في الغالب عن المخاطرة غير ثابت. يعتمد إذن هذا الاختبار على مضاعف لاغرانج *LM*. خطوات الاختبار كالتالي:

- ❖ تقدير النموذج العام $Y = X\beta + \varepsilon$ بطريقة المربعات الصغرى العادية ثم حساب مربعات البواقي ε_t^2.
- ❖ تقدير المعادلة التالية:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + u_t$$

مع حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2. نفقد في هذه الحالة *q* مشاهدة.

- ❖ فرضية ثبات التباين الشرطي للأخطاء *H0* التي ينبغي اختبارها هي:

$$H_0 : \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_q = 0$$

إحصائية مضاعف لاغرانج $LM = (n-q)\times R^2$ تتبع توزيع χ^2 بدرجة حرية q. إذا كان $(n-q)\times R^2$ أكبر من $\chi^2(q)$ (القيمة الحرجة لتوزيع χ^2 بنسبة معنوية α)، فإننا نرفض *H0* أي إذا كان هناك على الأقل معامل واحد من معاملات معادلة ARCH يختلف معنويا عن الصفر فإن التباين الشرطي للأخطاء غير متجانس.

رابعا: معالجة عدم ثبات تباين حد الخطأ :

من أبرز الطرق المستخدمة لتصحيح المشكلة هي طريقة المربعات الصغرى المرجحة، وتقوم هذه الفكرة على إعطاء القيم ذات الانحراف الأقل على خط الانحدار وزنا أكبر من القيم ذات الانحراف الأكبر في تقدير العلاقة محل الاعتبار. ويتوقف شكل النموذج الأصلي المُحوَّل على نمط عدم ثبات التباين المكتشف في النموذج الأصلي المقدر.

ويفرض أن النموذج الأصلي كان كما يلي : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i , i = 1,\ldots,n$ فإن هناك عدة أنماط (افتراضات) لعدم ثبات تباين الأخطاء، ويختلف النموذج أو المعادلة المحولة من افتراض إلى آخر.

- ❖ الافتراض الأول: $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 X_i^2$ وطبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي إلى الشكل التالي:

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{\beta_0}{X_i} + \beta_1 + \frac{\varepsilon_i}{X_i} = \beta_0 \frac{1}{X_i} + \beta_1 + \alpha_i$$

حيث : α_i عبارة عن حد الخطأ المحول $\frac{\varepsilon_i}{X_i}$

وبإجراء انحدار $\frac{Y_i}{X_i}$ على $\frac{1}{X_i}$ مستخدما طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على:

$$\left(\frac{\hat{Y}_i}{X_i}\right) = \hat{\beta}_0 \frac{1}{X_i} + \hat{\beta}_1$$

وبضرب المعادلة المحولة المقدرة السابقة في X_i يتم الحصول على النموذج الأصلي $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ بعد معالجة عدم ثبات التباين σ_ε^2، ويتضح مما سبق أن الحد الثابت في النموذج المحول (β_1) هو عبارة عن ميل

[1] Engle (1982)

معامل الانحدار للنموذج الأصلي، وميل معامل الانحدار للنموذج المحول هو عبارة عن الحد الثابت في النموذج الأصلي.

- الافتراض الثاني: $E(£_i^2) = ±^2 X_i$ وطبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي إلى المعادلة التالية:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{{}_0}{\sqrt{X_i}} + {}_1\sqrt{X_i} + \frac{£_i}{\sqrt{X_i}} = {}_0\frac{1}{\sqrt{X_i}} + {}_1\sqrt{X_i} + μ_i$$

حيث $μ_i$ عبارة عن حد الخطأ المحول $\frac{£_i}{\sqrt{X_i}}$، $X_i > 0$

وبنفس الحالة الأولى نجري انحدار $\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$ على $\frac{1}{\sqrt{X_i}}$، $\sqrt{X_i}$ بواسطة المربعات الصغرى العادية.

- الافتراض الثالث: $E(£_i^2) = ±^2 Y_i^2$، وطبقا لهذا الافتراض تكون المعادلة المحولة من الشكل:

$$\frac{Y_i}{Y_i} = \frac{{}_0}{Y_i} + {}_1\frac{X_i}{Y_i} + \frac{£_i}{Y_i} = {}_0\frac{1}{Y_i} + {}_1\frac{X_i}{Y_i} + ..$$

- الافتراض الرابع: $E(£_i^2) = ±^2 |£_i|$، ويتضمن هذا الافتراض أن تباين حد الخطأ دالة خطية لبواقي طريقة المربعات الصغرى العادية، وطبقا لهذا تكون المعادلة المقدرة كما يلي :

$$\frac{Y_i}{\sqrt{|£_i|}} = {}_0\frac{1}{\sqrt{|£_i|}} + {}_1\frac{X_i}{\sqrt{|£_i|}} + \frac{£_i}{\sqrt{|£_i|}}$$

- الافتراض الخامس : التحويلات اللوغاريتمية، إن تحويل النموذج الأصلي إلى الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة سوف يؤدي غالبا إلى تقليل درجة عدم ثبات تباين حد الخطأ، ومن ثم طبقا لهذا الافتراض تكون المعادلة المحولة المناسبة للنموذج الأصلي كما يلي : $LnY_i = {}_0 + {}_1LnX_i + £_i$.

حتاج إلى معرفة اللغة المستعملة و كيفية كتابة التعليمات.

تمارين

التمرين الأول:

1- وضح طبيعة مشكلة حد الخطأ أو عدم التجانس؟
2- أذكر أسباب تباين مشكلة حد الخطأ؟
3- كيف يمكنك اكتشاف مشكلة تباين حد الخطأ باستخدام اختبار بارك، اختبار سبيرمان؟

التمرين الثاني:

ليكن لدينا البيانات التالية والمتعلقة بالدخل Xi، والادخار Yi:

Yi	2262	2574	2834	3900	4810	5460	6500	7020
Xi	270	330	420	510	570	660	900	1050

- المطلوب:

1- در معادلة الانحدار بين Yi والمتغير المستقل Xi بالاستعانة بالبرنامج الإحصائي **Eviews**.
2- اختبر فرض ثبات أو عدم ثبات تباينات الأخطاء باستخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وإختبار باركPark عند مستوى معنوية 5%.

التمرين الثالث:

ليكن لدينا البيانات التالية والمتعلقة بالإنفاق الاستهلاكي Ci والدخل Yi في اقتصاد إحدى الدول خلال الفترة (2000-2011):

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Ci	**26.1**	**29.3**	**35.6**	**39.4**	**42.7**	**46.3**
Yi	**38.3**	**43.5**	**53.5**	**60.8**	**66.4**	**71.2**
السنة	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Ci	**50.1**	**54.5**	**60.1**	**64.9**	**69.2**	**73.1**
Yi	**77.2**	**86.1**	**94.6**	**102.4**	**109.9**	**115.6**

- المطلوب:

1- اختبر فرض ثبات أو عدم ثبات تباينات الأخطاء باستخدام اختبار Test Goldfeld-Quandt عند مستوى معنوية 5%.
2- اختبر فرض ثبات أو عدم ثبات تباينات الأخطاء باستخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان عند مستوى معنوية 5%.