جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف ـ المسيلة-

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير وعلوم المالية و المحاسبة
قسم علوم المالية والمحاسبة

ملخص محاضرات المصفوفات و حل جمل المعادلات الخطية

موجهة لطلبة السنة أولى علوم اقتصادية

قسم علوم المالية والمحاسبة

مقياس : الرياضيات-2-

إعداد الأستاذ : ديلمي مصطفى

السنة الجامعية: 2019 / 2020

مقلوب مصفوفة مربعة : نقول عن مصفوفة مربعة A أنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة مربعة نرمز لها ب A^{-1} بحيث :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

لتكن المصفوفتين A و B القابلتين للقلب , لدينا الخواص التالية :

$$(A^{-1})^t = (A^{t})^{-1} \quad ,(A^{-1})^{-1} = A \quad ,(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} \;, \qquad I^{-1} = I$$

2- المحددات :

2-1- تعريف المصفوفة المستخرجة : لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in M_m$, نرمز ب A_{ij} للمصفوفة المستخرجة من المصفوفة A من خلال حذف السطر رقم i و العمود j.

مثال : $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \;,\; A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2-2- تعريــف المحدد :

لتكن المصفوفة المربعة $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

- من أجل $m > 2$ فان محدد المصفوفة A هو العدد المرموز له ب :

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j_0}\, a_{ij_0} . |A_{ij_0}|$$

حيث j_0 هو عمود مختار عشوائيا من بين أعمدة المصفوفة A

مثال :

أحسب المحددات التالية : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - 4.1 = 0$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +1.(1-0) - 2.(0-2) + 1.(0-1) = 4$$

إذا كانت A مصفوفة مثلثيه سفلية أو علوية أو قطرية فان محددها يساوي جداء عناصرها القطرية .

خواص : - بصفة عامة إذا كانت المصفوفة B هي حاصل ضرب المصفوفة $A\epsilon M_m$ بالعدد λ فان :

$$|B| = \lambda^m . |A|$$

مثال : لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لدينا :

$$|A| = -2 \;, |B_1| = 5.|A| = -10 \;, \;\; |B_2| = 2^2.|A| = -8 \;, \;\; |B_3| = -|A| = +2$$

$$|A.B| = |A|.|B| \qquad , \qquad |A| = |A^t|$$

مثال: من أجل $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ لدينا : $A.B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

ومنه : $|A| = -1 \;, \; |B| = 2 \;\Rightarrow\; |A.B| = |\mathrm{A}|.|\mathrm{B}| = (-1).2 = -2$

نظرية : إذا كانت المصفوفة A مربعة فانه لدينا :

A مصفوفة قابلة للقلب $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = m$

نتيجة: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

2-3- تعريف المصفوفة المرافقة : لتكن $A \in M_m$ مصفوفة مربعة

نسمي مصفوفة مرافقة لـ A المصفوفة المعرفة بـ : $C^t = (c_{ij})^t$ حيث كل :

$c_{ij} = (-1)^{i+j} . |A_{i\,j}|$ و A_{ij} هي مصفوفة مستخرجة من A وذلك بحذف السطر i والعمود j.

نظرية : إذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب فان : $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^t$

مثال: من أجل المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ لدينا $|A| = 64 \neq 0$ ومنه A قابلة للقلب

لنحسب الآن عناصر المصفوفة $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$

لدينا : $c_{11} = (-1)^{1+1}.|A_{11}| = 12$, $c_{12} = (-1)^{1+2}.|A_{12}| = 6$,

$$c_{13} = (-1)^{1+3}.|A_{13}| = -16$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}.|A_{21}| = 4 \ , \quad c_{22} = (-1)^{2+2}.|A_{22}| = 2 \ ,$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}.|A_{23}| = 16$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}.|A_{13}| = 12 \ ,$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}.|A_{32}| = -10 \ , c_{33} = (-1)^{3+3}.|A_{33}| = 16$$

إذن $C^t = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^t = \frac{1}{64}.\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$

جمل المعادلات الخطية: من بين أهم تطبيقات المحددات هو حل جملة المعادلات الخطية من الشكل **A.X=b** حيث **A** مصفوفة من النمط ***(m،n)*** قابلة للقلب و **b** شعاع من $\mathbb{R}^m$ و **X** شعاع مجهول من $\boldsymbol{R^m}$.

طريقة كرامر: تعطى مركبات الشعاع **X** بالعبارة التالية: $\boldsymbol{x_i} = \frac{|A_i|}{|A|}$ حيث $\boldsymbol{A_i}$ هي المصفوفة **A** مع تعويض العمود رقم **i** بالشعاع **b.**

مثال : أوجد حلول جملة المعادلات :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

الحل:

1- نحسب $\det(A)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= [(1 \times 5 \times -1) + (2 \times 3 \times 2) + (1 \times 3 \times 7)] - [(2 \times 5 \times 1) + (7 \times 3 \times 1) + (-1 \times 3 \times 2)] = 3$$

-2 نحسب $|A_1|$:

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -87 \Rightarrow x = \frac{-87}{3} = -29$$

-3 نحسب $|A_2|$:

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33 \Rightarrow y = \frac{33}{3} = 11$$

-4 نحسب $|A_3|$:

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33 \Rightarrow z = \frac{33}{3} = 11$$

<u>طريقة استعمال المقلوب</u>: نقوم بحساب مقلوب المصفوفة A فيعطى الحل بالشكل التالي: $X = A^{-1}.b$

<u>مثال</u>: حل الجملة التالية: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ إذن يمكن كتابة هذه الجملة على الشكل التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نحسب أولا: $\boldsymbol{A^{-1}}$ فنجد: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ومنه حل الجملة هو:

$$X = A^{-1}.b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$