جامعة محمد بوضياف

كلية الاقتصاد وعلوم التسيير والتجارة

قسم الاقتصاد

السنـــة الثانية

محاضرات في الرياضيات المالية

إعداد الدكتور

لقليطي الاخضر

مقدمة :

تهدف هاته المحاضرات بصفة أساسية إلى تحديد محتويات مقياس الرياضيات المالية والموجه للطلبة إلى تحديد مختلف محاور هذا المقياس محاولة منا إلى اختصار كل محتويات هذه المادة في هاته المحاضرات حيث تم تناول المحور الأول عن الفائدة البسيطة بدءا بمفهومها وتحديد مختلف المعادلات لحسابها ومحدداتها إضافة إلى دراسة الخصم ومحتوياته فدراسة التكافؤ وكلها على مستوى المدى القصير . أما الشق الثاني فتم دراسة العمليات المالية على المدى الطويل بداء من تناول الفائدة المركبة ومختلف معادلاتها لحسابها ثم تناول الخصم عل المدى الطويل فدراسة التكافؤ على المدى الطويل وتحديد مختلف الحالات التي يمكن أن تعترض الطالب أثناء حساب العمليات المالية على المستوى الطويل بالإضافة إلى التطرق عل الدفعات سواء دفعات نهاية المدة أو بداية المدة وتحديد مختلف المعادلات بشان هذا المحور إضافة إلى تناول استهلاك القروض وتحديد مختلف العلاقات الرياضية المتعلقة بهذا المحور.

و في الأخير أمل أن أكون قد وفقت إلى تحقيق الهدف من كتابة هاته المحاضرات

.

الفهــرس العام

المحـــــتوى
العمليات المالية على المــدى القصـــير
المحور الاول الفـــائدة البســيطة
العمليات المالية على المــدى الطــويل
المحور الثاني الفـــائدة المركـــبة
المحور الثالث الدفـــــعات
المحور الرابع استهـــلاك القــروض

العمليات المالية على المدى القصير

Les opérations financières à court terme

المحور الاول الفائدة البسيطة

L'intérêt simple

حساب الفائدة البسيطة والرصيد (الجملة) أو القيمة المكتسبة.

أولا: الفائدة البسيطة

- **تعريف الفائدة البسيطة:** تعرف الفائدة على أنها الأجر او التعويض الذي يدفع مقابل حق استخدام الاصل (راس المال) المقترض أو المستثمر لفترة معينة زمنية معينة من الزمن وكذللك بمعدل فائدة معينة [1].

وبالتالي ومن خلال ما سبق تعني الفائدة المبلغ المدفوع (المصاريف مقابل استدانة راس مال او اصل) وتكون الفائدة في شكل نسبة مؤوية من الأصل مقابل استخدامه بفترة معينة من الزمن عادة لا تتعدى الفترة الزمنية سنة واحدة[2] وبذلك فالفائدة وتحسب على أساس (شهري، ثلاثي، سنوي).

ثانيا: حساب الفائدة البسيطة

في هذا الإطار يتم اعتماد فترة زمنية على أساس (السنة) مالم ينص على غير ذلك في أي نص وهنا توضح العناصر الأساسية المشكلة لقاعدة حساب الفائدة البسيطة كما يلي:[3]

- " رأس المال " الأصل أو المبلغ الموظف: C_0.
- معدل التوظيف او المعدل المطبق " نسبة مئوية ": T.
- الفترة الزمنية أو ما يسمى بمدة التوظيف: n.
- " مبلغ " الفائدة: I.
- الجملة المكتسبة أو الرصيد: C

ومن خلال ما سبق يتم حساب الفائدة وفق القاعدة الموالية مع ملاحظة انه لحساب الفائدة البسيطة هناك عدة حالات يتم ادراجهم وفق الاتي:

1. إذا كانت الفائدة السنوية: $\boldsymbol{I = c_0 \cdot \frac{T}{100} \cdot n_{\text{سنة}}}$
2. إذا كانت الفائدة الشهرية: $\boldsymbol{I = c_0 \cdot \frac{T \times n}{1200}}$
3. إذا كانت الفائدة بالأيام (360يوم): $\boldsymbol{I = \frac{c_0 . T . n}{36000}}$
4. إذا كانت الفائدة نصف شهرية (كل 15 يوم): $\boldsymbol{I = \frac{c_0 . T . n}{2400}}$

---

[1] ابراهيم موسى عبد الفتاح، حسن محمد علي،**مقدمة في رياضيات المال والاستثمار** ، مكتبة المدينة زقازيق، 2000،ص:01.
[2] عادة التوظيف بالنسبة بالفائدة لا تتعدى سنة واحدة وهو الشائع او المتعارف عليه
[3] مع ملاحظة قد تختلف الترميز لعناصر او مكونات الفائدة البسيطة من مصدر لأخر

ثالثا: الجملة المكتسبة أو الرصيد

وهي القيمة التي يبلغها المبلغ المودع بعد (n) سنة[4] او هو المبلغ المتحصل عليه عليه من صاحب رأس المال او الأصل الموظف بعد مدة زمنية معلومة وبمعدل توظيف معلوم ويتم حسابه وفق القاعدة الموالية:

الرصيد = رأس المال + الفائدة

$$C = C_0 + I$$

1-حساب الرصيد في حالة التوظيف على أساس سنوي:

لدينا:

$$I = \frac{c_0 . T . n}{100}$$

ومنه الرصيد إذا كان التوظيف على أساس سنة:

$$C = C_0 \left(1 + \frac{tn}{100}\right)$$

2-حساب الرصيد في حالة التوظيف على أساس شهري:

لدينا:

$$I = \frac{c_0 . T . n}{1200}$$

ومنه الرصيد إذا كان التوظيف على أساس شهري:

$$C = C_0 \left(1 + \frac{tn}{1200}\right)$$

3-حساب الرصيد في حالة التوظيف على أساس يومي:

لدينا:

$$I = \frac{c_0 . T . n}{36000}$$

ومنه الرصيد إذا كان التوظيف على أساس يومي:

$$C = C_0 \left(1 + \frac{tn}{36000}\right)$$

[4] محاضرات للدكتور سلمان معلا في جامعة حماة دمشق متاحة على الرابط ادناه
https://www.dropbox.com/sh/p57zf4cq0bo23hs/AAApOmw6_t8HbjiWL46PmLONa/%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A%D8%A7%D8%AA%20%D9%85%D8%A7%D9%84%D9%8A%D8%A9%20%D9%85%D8%AD%D8%A7%D8%B6%D8%B1%D8%A9%20%D8%A7%D9%84%D8%AB%D8%A7%D9%86%D9%8A%D8%A9%20%D9%88%D8%AB%D8%A7%D9%84%D8%AB%D8%A9%20.pdf?dl=0

مثال توضيحي:

قام شخص بتوظيف مبلغ قدره 35000دج في بنك معين لمدة 3 سنوات، بمعدل الفائدة قدره 8% كما وظف مبلغ قدره 25000 لمدة 6 أشهر ولكن بمعدل 7 %. كما وظف هذا الشخص مبلغ 15000 لمدة 150 يوم وبمعدل فائدة قدره 6 %.

المطلوب: -حساب الفائدة الاجمالية التي يتحصل عليها هذا الشخص.

- حساب الرصيد الإجمالي لهذا الشخص

الحل:

- حساب الفائدة الاجمالية التي يتحصل عليها هذا الشخص لدينا

1-المبلغ الأول على أساس التوظيف سنوي ومنه لدينا:

$$t = 8\%, n = 3ans, c_0 = 35000DA$$

$$I_1 = \frac{c_0.T.n}{100} \qquad I_1 = \frac{35000 \times 3 \times 8}{100} = 8400$$

2-المبلغ الثاني على أساس التوظيف شهري ومنه لدينا:

$$t = 7\%, n = 6mois, c_0 = 25000DA$$

$$I_2 = \frac{c_0.T.n}{1200} \qquad I_2 = \frac{25000 \times 6 \times 7}{1200} = 875$$

3-المبلغ الثالث : لدينا :

$$t = 6\%, n = 150jour, c_0 = 15000DA$$

$$I_3 = \frac{c_0.T.n}{36000} \qquad I_3 = \frac{15000 \times 150 \times 6}{36000} = 375$$

ولحساب مجموع الفوائد المتحصل عليها لدينا:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

ومنه:

$$I = 8400 + 875 + 375 = 9650$$

- حساب الرصيد الإجمالي لهذا الشخص

لدينا:

الرصيد = رأس المال + الفائدة

$$C = C_0 + I$$

ومنه اجمالي الرصيد المتحصل عليه لهذا الشخص هو:

$$C = 35000 + 25000 + 15000 + 9650 = 84650$$

رابعا: طريقة القاسم لحساب الفائدة

تهدف هذه الطريقة لاختصار حساب هذه العملية الحسابية عندما تكون الفوائد بالايام مختلفة ولكن بنفس معدل التوظيف.

- لدينا $I = \frac{c_{0_1}.T_1.n_1}{36000}$ بقسمة هذه المعادلة على t نجد:

$$I = \frac{c_0.T_n/t}{36000/t} \Leftrightarrow I = \frac{c_0.n}{36000/t} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}$$

$$I = \frac{N}{D}$$

استنتاج: في حالة حساب مجموعة من الفوائد وبمعدل توظيف ثابت فانه يتم حسابها وفق القاعدة الموالية:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots I_k$$

$$I = \frac{N_1}{D} + \frac{N_2}{D} + \frac{N_3}{D} + \cdots + \frac{N_k}{D}$$

$$I = \frac{\sum N_I}{D}$$

مثال :

اذا كانت لديك مجموع من الأصول موظفة بمعدل ثابت قدره 10**%** كما يلي:

- الأصل الأول **4500** موظف لمدة **60** يوم.
- الأصل الثاني **7000**موظف لمدة **90** يوم.
- الأصل الثاني 1000موظف لمدة **100** يوم.

أحسب الفائدة الاجمالية.

الحل:

لدينا:

$$I = \frac{\sum N_I}{D}$$

ومنه:

$$I = \frac{(4500)(60)+(7000)(90)+(1000)(100)}{36000/10} = 277.77DA$$

خامسا: المعدل المتوسط لمجموعة أصول موظفة بمعدلات متباينة

إذا كان لدينا رؤوس الأموال التالية ومدة توظيفها المختلفة ومعدلات التوظيف المختلفة التالية:

$C_{01} \longrightarrow t_1 \longrightarrow n_1$ يوم.

$C_{02} \longrightarrow t_2 \longrightarrow n_2$ يوم.

$C_{03} \longrightarrow t_3 \longrightarrow n_3$ يوم.

$C_{0K} \longrightarrow t_K \longrightarrow n_K$ يوم.

فالفائدة الاجمالية تحسب وفق القاعدة الموالية:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots I_k$$

إذا رمزنا لمعدل المتوسط للفائدة (t) حيث t هو متوسط معدل الفائدة التي تنتج عنه نفس الفائدة والاجمالية المحسوبة على أساس معدلات فائدة مختلفة ومنه يكون:

$$I = \frac{c_{0_1}.T_1.n_1}{36000} + \frac{c_{0_2}.T_2.n_2}{36000} + \frac{c_{0_3}.T_3.n_3}{36000} + \frac{c_{0_k}.T_k.nk}{36000} \dots\dots\dots\dots (1)$$

وباستخدام معدل الفائدة المتوسطة t فإن:

$$I = \frac{c_{0_1}.t.n_1}{36000} + \frac{c_{0_2}.t.n_2}{36000} + \frac{c_{0_k}.t.nk}{36000} \dots\dots\dots\dots (2)$$

من(1) و(2) :

$$I = \frac{c_{0_1}.T_1.n_1}{36000} + \frac{c_{0_2}.T_2.n_2}{36000} + \frac{c_{0_3}.T_3.n_3}{36000} + \frac{c_{0_k}.T_k.nk}{36000}$$

$$I = \frac{c_{0_1}.T_1.n_1}{36000} + \frac{c_{0_2}.T_2.n_2}{36000} + \frac{c_{0_3}.T_3.n_3}{36000} + \frac{c_{0_k}.T_k.nk}{36000}$$

$$t = \frac{c_{0i}.T_1.n_1}{c_{0_i}.n_1}$$

تطبيق:

إذا كانت لديك مجموع من الأصول موظفة بمعدلات مختلفة كما يلي:

-الأصل الأول 15000 موظف بمعدل 7% لمدة 80 يوم.

-الأصل الثاني 5000 موظف بمعدل 9% لمدة 60 يوم.

-الأصل الثاني 1500 موظف بمعدل 10% لمدة 70 يوم.

المطلوب: احسب معدل المتوسط

الحل:

لدينا:

$$t = \frac{\sum c_{0i}.T_1.n_1}{\sum c_{0_i}.n_1}$$

ومنه:

$$t = \frac{(15000)(7)(80) + (5000)(9)(60) + (1500)(10)(70)}{(15000 \times 80) + (5000 \times 60) + (1500 \times 70)} = 7{,}57$$

سادسا: العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة

يتم حساب العلاقة بين الفائدة التجارية (T_C) والفائدة الحقيقية أو (الصحيحة)T_R وفق القاعدة التالية:

لدينا معادلة الفائدة البسيطة التجارية تحسب وفق القاعدة التالية:

$$I_c = \frac{c_0.t.n}{36000} \text{.......................}(1)$$

ومعادلة الفائدة البسيطة الصحيحة تحسب وفق القاعدة التالية:

$$I_R = \frac{c_0.t.n}{36500} \text{ .... } (2)$$

وبقسمة (1)على (2) نجد:

$$I_c/I_R = \frac{36500}{36000} = \frac{73}{72}$$

مثال توضيحي:

اقترض تاجر بتاريخ 11فيفري 1994 مبلغ 20000 دج من احد البنوك التجارية بمعدل فائدة بسيطة 10% سنويا.

المطلوب: حساب الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة المستحقة عليه يوم 22جويلية 1994

الحل:

بما ان التاريخ الميلادي 1994 لايقبل القسمة على 4 فالسنة هي كبيسة وشهري فيفري هو 28 يوم وعدد أيام السنة 365 ولحساب الفترة الزمنية نجد:

فيفري+ مارس + افريل + ماي+ جوان + جويلية

وبالتالي: (28-22) + 31+ 30+31+22=161

ومنه لحساب الفائدة التجارية لدينا: $I_c = \frac{c_0.t.n}{36000}$

ومنه: $I_c = \frac{20000.10.161}{36000} = 8944,4DA$

اما لحساب الفائدة الصحيحة لدينا :

$$I_R = \frac{c_0.t.n}{36500}$$

ومنه اما لحساب الفائدة الصحيحة لدينا:

$$I_R = \frac{20000.10.161}{36500} = 8921.9DA$$

القيمة الحالية والخصم

أولا: مفهوم القيمة الحالية

القيمة الحالية هي قيمة الأصل أو الدين بعدما يتم خصم مبلغ محدد ويضم عادة الأوراق التجارية بمختلف أنواعها (الكمبيالات، السفتجة، السند الأدنى).[5]

ثانيا: مكونات القيمة الحالية

- **القيمة الاسمية:** هي قيمة الورقة التجارية قبل الخصم.
- **الخصم:** هو عمولة البنك التي يتم اقتطاعها عند تحصيل الورقة التجارية قبل تاريخ استحقاقها (يتم حساب فترة الخصم على اساس الفارق بين تاريخ الاستحقاق وتاريخ الخصم).

[5] بودرامة مصطفى ، **الرياضيات مالية** ، البدر للنر والتوزيع ، 2005، ص: 21

- **القيمة الحالية:** هي قيمة الورقة بعد خصمها (القيمة الاسمية ناقص الخصم).

- **تاريخ الاستحقاق:** هو التاريخ الذي يتم الاتفاق عليه بين المورد والزبون.

- **تاريخ الخصم:** في حالة خصم ورقة قبل تاريخ استحقاقها (تاريخ الخصم يكون قبل تاريخ الاستحقاق) القيمة الحالية للورقة التجارية أقل من القيمة الاسمية.

ثالثا : قانون القيمة الحالية

يتم حساب القيمة الحالية من خلال المعطيات التالية:

- إذا أعطينا للقيمة الحالية الرمز A.

- القيمة الاسمية الرمز V.

- الخصم E.

وبالتالي يكون حساب القيمة الحالية كما يلي: A= V – E. أي ان

القيمة الحالية = القيمة الاسمية – قيمة الخصم

La valeur actuelle = valeur nominale - la valeur de l'escompte

مع العلم أن:

قيمة الخصم يتم حسابها كما يلي:

$$E = \frac{V.t.n}{36000} = \frac{Vn}{D}$$

حيث t: معدل الخصم (نسبة مئوية)

n : المدة الفاصلة بين تاريخ الاستحقاق وتاريخ الخصم

نعوض معادلة حساب الخصم(E) في معادلة حساب القيمة الحالية نجد في (A):

$$E = \frac{Vn}{D} \Rightarrow A = v - \left(\frac{vn}{D}\right) \Rightarrow A = \left(v\left(1 - \frac{n}{D}\right)\right)$$

ومنه:

$$E = V\left(D - \frac{N}{D}\right)$$

رابعا: الخصم التجاري والخصم الحقيقي (الصحيح)

في الواقع العملي يوجد نوعين من الخصم هما:

-الخصم التجاري يتم الترميز له بالرمز E_C

-الخصم الحقيقي يتم الترميز له بالرمز E_R

1-الخصم التجاري Ec:

يتم حساب الخصم التجاري على اساس القيمة الاسمية للورقة التجارية (V)، ويعد هذا الصنف من الخصم الأكثر استخداما للممارسات الميدانية للبنوك وذلك لسببين هما:[6]

- مبلغ خصم التجاري أكبر من مبلغ الخصم الحقيقي.

- البساطة في العمليات الحسابية للخصم التجاري ويتم حساب الخصم التجاري وفق الصيغة التالية:

$$Ec = \frac{V.t.n}{36000} = \frac{Vn}{D}$$

وتكون القيمة الحالية في هذه الحالة كمايلي:

$$A=V-E$$

$$E_C = V - \frac{Vn}{D} \qquad \Leftarrow \qquad E_C = \frac{Vn}{D}$$

$$E_C = \frac{V(D-n)}{D}$$

$$AD = V(D-n) \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{AD}{D-n}$$

$$A = v - E$$

[6] بن سديرة عمر ، محاضرات في الرياضيات مالية موجه للسنة ثانية ، جامعة فرحات عباس ، 2011

$$A = V - \frac{Vn}{D}$$

$$A = \frac{VD - Vn}{D}$$

ومنه:

$$A = V\left(\frac{D-n}{D}\right)$$

من خلال ما سبق يلاحظ أن الخصم التجاري انخفض (نقص) من القيمة الاسمية للورقة التجارية فنحصل على قيمتها الحالية.

2- الخصم الحقيقي E_R:

يتم حسابه على أساس القيمة الحالية للورقة التجارية (A) وبذلك فهو أقل من الخصم التجاري ويعد أقل شيوعا في الممارسات الميدانية للبنوك والخصم الحقيقي يضاف للقيمة الحالية (A) فنتحصل على القيمة الاسمية للورقة التجارية ويتم حسابه كما يلي:

$$E_R = \frac{Atn}{36000} \quad \text{او} \quad E_R = \frac{An}{D}$$

ومنه

$$V = A + E_R$$

ومنه

$$V = A + \frac{An}{D} \quad \Leftrightarrow V = \frac{AD + An}{D}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{A(D+n)}{D}$$

كما يمكن حساب الخصم الحقيقي E_R بالاعتماد على القيمة V الاسمية

$$E_R = \frac{Vn}{D+n}$$

خامسا: العلاقة بين الخصم التجاري والخصم الحقيقي

لدينا:

$$E_C - E_R = \frac{Vn}{D} - \frac{Vn}{D+n}$$

ومنه:

$$E_C - E_R = \frac{Vn^2}{D(D+n)}$$

كما توجد هناك علاقة ثانية بين الخصم التجاري E_C و الخصم الحقيقي E_R تحسب وفق العلاقة التالية :

$$\frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_C} = \frac{1}{V}$$

ملاحظة: في العادة يتم حساب الخصم التجاري وكذلك الفائدة التجارية ما لم تكن هناك معلومات أو معطيات تشير إلى الخلاف على ذلك في أي مسالة أو تمرين.

مثال توضيحي:

لتكن لديك المعلومات الاتية والمطلوب تحديد قيم الخصم التجاري والخصم الحقيقي والقيمة الاسمية للورقة التجارية ومعدل الخصم

$E_R + E_C = 495$

$E_C \times E_R$=61250

n=77j

المطلوب :

1 -تحديد قيمة الخصم التجاري والحقيقي

لدينا: $E_r(495 - E_r)$

$E_r(495 - E_r)$=61250

495 E_r –$E_r{}^2$ = 61250

$$E_R{}^2 = \frac{61250}{E_R} = 495$$

ومنه لدينا:

$$E_R{}^2 - 495E_R + 61250 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-495)^2 - 4(1)(61250)$$

$$245025 - 245000 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

من المعلوم ان الخصم التجاري اكبر من الخصم الحقيقي وبالتالي يكون:

خصم حقيقي:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{495 - 5}{2} = 245$$

خصم تجاري:

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{495+5}{2} = 250$$

2 ـ تحديد القيمة الإسمية v

من قانون

$$\frac{1}{Er} - \frac{1}{Ec} = \frac{1}{V}$$

$$\frac{1}{200} - \frac{1}{250} = \frac{1}{\mathrm{v}} \Longrightarrow \frac{250-245}{61250} = \frac{1}{V} \Leftrightarrow V = 21250$$

3-حساب المعدل t

- الطريقة الاولى :

$$E_C = \frac{V.t.n}{36000}$$

$$250 = \frac{12250 \times 77t}{36000} \Longrightarrow t = 9.5\%$$

- الطريقة الثانية :

$$E_C = \frac{Vn}{D} \Longrightarrow 250 = \frac{12250(77)}{D}$$

$$D = \frac{12250(77)}{250} = 3773$$

$$D = \frac{36000}{T}$$

$$D = \frac{36000}{T}$$

$$T = \frac{250(36000)}{12250(77)} = 9.5\%$$

تكافؤ الأوراق التجارية

تكافؤ الأوراق التجارية هو ذلك الاتفاق بين طرفي العلاقة (مدين والدائن) حيث يتم الاعتماد على ورقة تجارية جديدة أو (عدة أوراق) لتسديد الدين المعبر عنه بورقة تجارية وذلك بتغيير طريقة التسديد بشكل يتماشى وفق الحالة المالية للمدين.

أولا : قانون تكافؤ الورقتين التجاريتين

تتكافؤ ورقتين تجاريتين إذا تساوت قيمتهما الحالية وبنفس معدل الخصم التجاري.

إذا كان لدينا القيمة الاسمية للورقتين التجارتين v_1, v_2, n_1 المدة الفاصلة بين تاريخ الاستحقاق للورقة الأولى وتاريخ التكافؤ لنفس الورقة.

n_2 : المدة الفاصلة بين تاريخ الاستحقاق للورقة الثانية وتاريخ التكافؤللورقة الثانية

A_1 : القيمة الحالية للورقة الأولى.

A_2: القيمة الحالية للورقة الثانية.

من خلال شرط التكافؤ نجد:

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow V_1\left(\frac{D - n_1}{D}\right) = V_2\left(\frac{D - n_2}{D}\right)$$

لاحظ أن D نفسه لأن معدل الخصم نفسه وبالتالي $D= 36000/t$

من خلال ما سبق يلاحظ انه لدينا 3 إشكاليات أو 3 حالات:

- الحالة الأولى: معرفة القيمة الاسمية وتاريخ الاستحقاق للورقة الجديدة ونريد تاريخ التكافؤ.
- **الحالة الثانية:** معرفة القيمة الاسمية للورقة الجديدة ونريد تحديد تاريخ إستحقاقها.
- **الحالة الثالثة:** معرفة تاريخ استحقاق الورقة الجديدة ونريد تحديد قيمتها الاسمية.

ويتم تناول هذه الحالات خلال التمارين الموالية:

- المثال الأول

في عملية تجارية بين الطرفين تتيح عنها ورقة تجارية قيمتها الاسمية 65500 دج وتاريخ إستحقاقها هو: 31 – 03 -2010.

ولكن نظر للوضعية المالية لطرف الدائن لقد تم الإتفاق بين طرفي العملية على استبدال الورقة السابقة بورقة جديدة، قيمتها الاسمية 660000 وتاريخ استحقاقها 30-04-2010.

المطلوب: إذا علمت أن معدل الخصم قدره 9% فماهو تاريخ تحديد التكافؤ بين الورقتين (تاريخ إستبدال الورقتين)

الحل: لدينا

$$n_2 = n_1 + 30$$

$$D = \frac{36000}{9} = 4000$$

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1\left(\frac{D - n_1}{D}\right) = V_2\left(\frac{D - n_2}{D}\right)$$

تاريخ إستحقاق الورقة الأولى يكون قبل تاريخ الاستحقاق للورقة الثانية وتاريخ تكافؤ قبل تاريخ استحقاق الورقتين

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow V_1\left(\frac{D - n_1}{D}\right) = V_2\left(\frac{D - n_2}{D}\right)$$

$$\Rightarrow 65500\left(\frac{4000 - n_1}{4000}\right) = 66000\left(\frac{4000 - (n_1 + 30)}{4000}\right)$$

$$65500(4000 - n_1) = 66000(4000 - n_1) - 1980000$$

$$1980000 = 66500(4000 - n_1) - 65500(4000 - n_1)$$

$$1980000 = 500(4000 - n_1)$$

$$4000 - n_1 = \frac{1980000}{500}$$

$\Rightarrow n_1 = 40$

40-31=09 يوم فيفري   28 فيفري -09 = 19

إذا تاريخ التكافؤ هو 19 فيفري 2010

ملاحظة:

- تاريخ التكافؤ يكون قبل تاريخ إستحقاق الورقتين.
- تاريخ استحقاق الورقة الجديدة يكون بعد تاريخ استحقاق الورقة الأولى (القديمة)
- القيمة الاسمية للورقة الجديدة تكون أكبر من القيمة الاسمية للورقة الأولى.

المثال الثاني:

إذا كانت لديك المعلومات التالية حول ورقة تجارية قيمتها الاسمية 34726,86 دج تاريخ استحقاقها يوم 2014/05/25 يتم استبدال هذه الورقة بورقة جديدة بتاريخ: 2014/05/10 حيث القيمة الإسمية للورقة الجديدة تقدر ب: 35000دج ،إذا علمت أن معدل الخصم يقدر ب 08%

المطلوب: حدد تاريخ الاستحقاق الورقة الجديدة؟

الحل:

$$D = \frac{36000}{08} = 4500$$

$$n_1 = 25 - 10 = 15$$

$$n_1 = 15\text{يوم}$$

$$A_1 = A_2$$

$$\Leftrightarrow V_1\left(\frac{D - n_1}{D}\right) = V_2\left(\frac{D - n_2}{D}\right)$$

$$34726.86\left(\frac{4500-15}{4500}\right)=35000\left(\frac{4500-n_2}{4500}\right)$$

$$34726.86(4485)=35000(4500-n_2)$$

$$n_2=50\,JOUR$$

شهرماي

31-10=21 يوم   ومنه 29=50-21

تاريخ الاستحقاق هو 29 جوان للورقة الجديدة

المثال الثالث

قام شخص معين بعملية استبدال ورقة تجارية جديدة وقد كانت لديك المعطيات الخاصة بالعملية

تاريخ الاستبدال (التكافؤ)05-مارس

القيمة الاسمية للورقة الأولى 15000 تاريخ الاستحقاق الورقة الأولى 31 مارس تاريخ استحقاق الورقة الجديدة 15 ماي.

المطلوب: ايجاد القيمة الاسمية للورقة الجديدة مع العلم أن معدل الخصم 09 %

الحل:

$n_1=31-5 \Rightarrow n_1=26$يوم

$$n_2=26+30+15$$

$$n_2=71\,jour$$

لدينا:

$$A_1=A_2$$

$$\Leftrightarrow A_1\left(\frac{D-n_1}{D}\right) = A_2\left(\frac{D-n_2}{D}\right)$$

$$15000\left(\frac{4000-26}{4000}\right) = V_2\left(\frac{000-71}{4000}\right)$$

$$V_2 = 15171.79\ DA$$

ثانيا: تكافؤ عدة أوراق تجارية

تتكافئ مجموعة من الأوراق التجارية مع مجموعة الأخرى من الأوراق إذا كان مجموع القيم الحالية للأوراق الأولى = مجموع القيم الحالية للأوراق الجديدة تطبيقيا تكافؤ عدة اوراق يعنى اذا كان v_1 و v_2 القيم الاسمية لورقتين تجاريتين و n_1 و n_2 المدة الفاصلة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ استحقاق الورقتين

v_5, v_4, v_3 القيم الاسمية للأوراق تجارية أخرى n_3, n_4, n_5 المدة الفاصلة بين تاريخ التكافؤ وبين تاريخ استحقاق الأوراق الثلاثة فالتكافؤ بين مجموع الأولى من الأوراق التجارية ومجموع الثانية يتحقق إذا كان:

$$A_1+A_2+A_3=A_3+A_4$$

$$A_1\left(\frac{D-n_1}{D}\right) + A_2\left(\frac{D-n_2}{D}\right) = A_3\left(\frac{D-n_3}{D}\right)$$

مثال توضيحي

لديك المعلومات التالية حول مجموعة من الأوراق التجارية

- الورقة الأولى قيمتها الاسمية 3000 دج تستحق بعد 25 يوم

- الورقة الثانية قيمها الاسمية 5000 دج تستحق بعد 30 يوم

- الورقة الثالثة قيمها الاسمية 6000دج تستحق بعد 50 يوم

عوضت هذه الأوراق بورقة تجارية جديدة تستحق بعد 70 يوم

فإذا علمت أن معدل الخصم 6% حدد القيمة الاسمية للورقة الجديدة.

الحل:

لدينا: $A_1 = A_2+A_3 +A_4$

$$V_1\left(\frac{D-n_1}{D}\right) = V_2\left(\frac{D-n_2}{D}\right) + V_3\left(\frac{D-n_3}{D}\right) + V_4\left(\frac{D-n_4}{D}\right)$$

$$V_1\left(\frac{6000-70}{6000}\right) = 3000\left(\frac{6000-25}{6000}\right) + 5000\left(\frac{6000-30}{6000}\right) + 6000\left(\frac{6000-50}{6000}\right)$$

$$V_1 = 14076.72\ DA$$

العمليات المالية على المدى الطويل

Opérations Financières A Long Terme

المحور الثاني الفائدة المركبة

L'intérêt composé

قانون الرصيد بالفائدة على المدى الطويل أو المركبة

أولا: تمهيد

عملية توظيف رأس المال لمدة تفوق عن سنة تسمى بالفائدة المركبة حيث يتم فيها رسملة الفائدة (إعادة التوظيف) وهذا يعني أن الفائدة تضاف في النهاية كل سنة (الفائدة) إلى المبلغ الذي أنتجها (الأصل) وتحسب الفائدة في نهاية الفترة التالية على المبلغ الاصلي والفائدة معا وهكذا دواليك حتى نهاية فترة التوظيف، فالوحدة الزمنية المستخدمة في العمليات المالية طويلة الأجل هي عادة السنة وفي بعض الأحيان السداسي والثلاثي[7]

ثانيا: القانون الأساسي للرصيد

- لنرمز للمبلغ الموظف c_0

- معدل الفائدة t

- مدة التوظيف n

- الجملة المكتسبة C_n

ومنه قانون الرصيد وفق الفائدة المركبة $c_n = c_0(1+t)^n$

مثال:

تم توظيف مبلغ 40000 دج لمدة 6 سنوات بمعدل فائدة سنوية 09%

أحسب الجملة او الرصيد والفائدة المتحصل عليها؟

الحل:

1- حساب قيمة الرصيد لدينا $c_n = c_0(1+t)^n$

$$c_n = 40000(1+0.09)^6 = 67084{,}0044\ DA$$

2- حساب الفائدة:

لدينا الفائدة = الرصيد – الأصل

[7] بودرامة مصطفى ، **مرجع سابق**، ص:44

$$I = c_n - c_0$$

$$I = 67084,0044 - 40000$$

$$I = 27084,0044$$

ثالثا : **قانون حساب الفائدة**

$$I = c_n - c_0 \Rightarrow I = c_0(1+t)^n - c_0$$

$$I = c_0((1+t)^n - 1)$$

رابعا : **حساب عناصر الجملة**

1- حساب الأصل المبلغ الموظف:

يحسب مبلغ الموظف C_0 كما يلي: $c_n = c_0(1+t)^n$

$$c_0 = \frac{c_n}{(1+t)^n} \quad c_0 = c_n(1+t)^{-n}$$

2- حساب المعدل

حساب المعدل: $c_n = c_0(1+t)^n$

$$(1+t)^n = \frac{c_n}{c_0}$$

$$\ln(1+t)^n = \ln\frac{c_n}{c_0}$$

$$n \ln(1+t) = \ln\frac{c_n}{c_0}$$

$$\ln(1+t) = \ln\frac{c_n/c_0}{n}$$

$$e^{\ln(1+t)} = \mathrm{e}^{\ln\frac{c_n/c_0}{n}}$$

$$1+t = \mathrm{e}^{\ln\frac{c_n/c_0}{n}}$$

$$t = e^{\ln\frac{c_n/c_0}{n}} - 1$$

مثال توضيحي

تم توظيف مبلغ 1000 لمدة 3 سنوات وتحصلنا على رصيد قدره 12800

المطلوب: حساب المعدل؟

لدينا ط1:

$$c_n = 12800$$

$$c_0 = 10000$$

$$t = e^{\ln\frac{12800/10000}{3}} - 1$$

$$t = 8.5\%$$

ط2:

$$c_n = c_0(1+t)^n$$

$$12800 = 10000(1+t)^3$$

$$(1+t)^3 = 1.28$$

$$(1+t)^3 = (1.28\ )^{1/3}$$

$$t = 0.0857$$

$$t = 8.57\%$$

خامسا : كيفية حساب مدة التوظيف

لدينا $c_n = c_0(1+t)^n$

ومنه $(1+t)^n = \frac{c_n}{c_0}$

$$n\ \ln(1+t) = \ln\frac{c_n}{c_0}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{c_n}{c_0}\right)}{\ln(1+t)}$$

مثال توضيحي (1)

تم توظيف مبلغ 20000 دج بمعدل فائدة سنوي 09 % فوجد الرصيد بعد مدة الرصيد 40000

أحسب مدة التوظيف

الحل:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{c_n}{c_0}\right)}{\ln(1+t)} = \ln\frac{40000/20000}{\ln(1+0.09)} = 8.04$$

يعني n= 8

مثال توضيحي (2): أوجد المعدل إذا تم توظيف رأس مال معين وبعد 10 سنوات تحصلنا على ضعف رأس المال

الحل :

$$c_n = c_0(1+t)^n$$

$$2c_0 = c_0(1+t)^n$$

$$2 = (1+t)^n$$

$$2^{1/10} = (1+t)^1$$

$$t = 7\%$$

المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة

عادة يكون المعدل السنوي لحساب الفائدة لكن واقعيا قد يكون المعدل السنوي لكن حساب الفائدة يكون إما سداسي أو كل ثلاثي وبالتالي وجب إيجاد المعدل المكافئ وهو ما يتم التطرق إليه في هذا القسم

إن المعدلات المتكافئة تغطي نفس الجملة المكتسبة خلال فترة زمنية معينة ليكن :

t_a المعدل السنوي

T_s المعدل السداسي

T_d المعدل الثلاثي

لدينا:

$$c_1 = c_0(1 + \mathrm{t_a})$$

$$c_2 = c_0(1 + t_s)^2$$

$$c_2 = c_1$$

$$c_0(1 + t_a) = c_0(1 + t_s)^2$$

$$\sqrt{(1 + t_a)} = (1 + t_s)$$

المعدل السداسي:

$$t_s = (1 + t_a)^{1/2} - 1$$

المعدل الثلاثي:

$$t_d = (1 + t_a)^{1/4} - 1$$

العلاقة بين المعدل الثلاثي والسداسي

$$t_d = (1 + t_s)^{1/2} - 1$$

مثال : أحسب المعدلات المتكافئة السداسية والثلاثية للمعدلات السنوية الآتية : 15% و 9% و5% .

أولا: المعدل 15%

المعدل السداسي:

$$t_s = (1 + 0.15)^{1/2} - 1 = 1.0723 - 1 = 7.238\ \%$$

الثلاثي:

$$t_d = (1 + 0.15)^{1/4} - 1 = 1.03555 - 1 = 3.55\ \%$$

ثانيا: المعدل 9%

السداسي

$$t_s = (1 + 0.09)^{1/2} - 1 = 4.40\ \%$$

الثلاثي

$$t_d = (1 + 0.09)^{1/4} - 1 = 2.17\ \%$$

ثالثا: المعدل 5%

السداسي

$$t_s = (1 + 0.05)^{1/2} - 1 = 2.46\ \%$$

الثلاثي

$$t_d = (1 + 0.05)^{1/4} - 1 = 1.22\ \%$$

مثال توضيحي:

وظف شخص مبلغ وقدره 40000 لمدة أربع سنوات بمعدل فائدة 5% سداسي:

الحل:

ط1:

$$n = 4 = n_s = 8$$

$$c_{68} = c_0(1 + 0.05)^8$$

$$c_6 = 59098.2\ DA$$

ط2:

$$(1 + t_a) \ = (1 + t_s)^2 \Rightarrow \ (1 + t_a) \ = (1 + 0.05)^2$$

$$(1 + t_a) \ = 1.1025 \Rightarrow$$

$$t_a = 10.25$$

$$c_4 = c_0(1 + t_a)^4 \Rightarrow c_3 = 59098.2\ DA$$

الخصم والقيمة الحالية

الخصم هو مبلغ ناتج عن خدمة يقدمها البنك بمعدل معين ومحسوب من القيمة الاسمية للورقة التجارية والتي يعبر عنها وفق القاعدة التالية: [8]

$$e = v - A$$

لدينا قانون الخصم وهو $e = v - A$

E هو الخصم

لدينا $A = \frac{v}{(1+t_a)^n} = A = \ v(1 + t_a)^{-n}$

n هي المدة الفاصلة بين تاريخ الخصم وتاريخ الاستحقاق

[8] Walder Masiéri , **Mathématiques financières**, Edition Dalloz, paris ,2001,p:24

لدينا $e = v - A$

ومنه $e = v - v(1 + t_a)^{-n} \Rightarrow$

$$e = v\left(1 - (1 + t_a)\right)^{-n}$$

مثال: ورقة مالية قيمتها الاسمية 150000 DA تستحق بعد 3 سنوات تم خصمها بمعدل فائدة سنوي 8 %

المطلوب: أحسب القيمة الحالية ومبلغ الخصم؟

$$A = v(1 + t_a)^{-n}$$

$$\Rightarrow A = 150000(1 + 0.08)^{-3}$$

$$A = 119074,83\ DA$$

قيمة الخصم:

$$e = v - A$$

$$e = 150000 - 119074,83 = 30925,16\ DA$$

ملاحظة:

إن القيمة الحالية هي قيمة رأس المال المتعاقد عليه في لحظة الإتفاق أو التعاقد واللحظة الصفرية (0)

مثال:

لتسديد دين القيمة 16105.1 بعد خمس سنوات إذا كانت قيمته الحالية 10000 دج أحسب معدل الخصم؟

الحل:

$$v = 16105.1\ DA$$

$$n = 5$$

$$A = 10000$$

$$A = v(1 + t_a)^{-n}$$

$$\frac{A}{v} = (1 + t_a)^{-n}$$

$$\left(\frac{A}{v}\right)^{\frac{-1}{n}} = (1 + t)^{-n\left(\frac{1}{-n}\right)}$$

$$\left(\frac{A}{v}\right)^{\frac{-1}{n}} = (1 + t)$$

$$t = \left(\frac{A}{v}\right)^{\frac{-1}{n}} - 1$$

$$\Rightarrow t = \left(\frac{10000}{16105.1}\right)^{\frac{-1}{5}} - 1$$

$$\Rightarrow t = 10\ \%$$

مثال توضيحي:

يسدد دين قدره 83855 دج بعد معينة إذا كانت قيمته الحالية 50000 دج بمعدل خصم 09%

أحسب المدة ؟

$$v = A(1 + t)^n$$

$$83855 = 50000(1 + 0.1)^n$$

$$83855 = 50000\ (1 + 0.09)^n$$

$$\ln\frac{83855}{50000} = n \ln\ (1 + 0.09)$$

$$n = 6$$

ومنه المدة هي 6 سنوات n=6

تكافؤ الديون ورأس المال

ان راس مالين لقيمتين اسميتين غير متساويتين وتاريخا استحقاق مختلفتين خصما لفائدة مركبة بنفس المعدل بتاريخ الخصم القيمة الحالية لهما متساويتين وبالتالي متكافئين[9]

يتكافؤ الديون اذا تكافأت قيمها الحالية عند تاريخ المقارنة بمعدل فائدةواحد وكما يمكن ان تتكفأ قيمة دين مع دين اخر ، فانه يمكن ان تتكافا مجموعة قيم ديون مع مجموعة اخرى. [10]

$$A = v(1+t_a)^{-n}$$

$$A_1 = A_2 = v_1(1+t)^{-n_1} = v_2(1+t)^{-n_2}$$

المثال التوضيحي الاول:

تعوض الديون الثلاثة الاتية

- الدين الأول: قيمته 5000 يستحق بعد سنة
- الدين الثاني: قيمته 7000دج يستحق بعد سنتين
- الدين الثالث: قيمته 10000 يستحق بعد ثلاثة سنوات

بدين واحد قيمته تستحق بعد خمس سنوات بمعدل خصم 7%.

المطلوب : أحسب مبلغ الدين الوحيد

الحل:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = v(1+t_a)^{-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1(1+t_a)^{-n_1} + v_2(1+t_a)^{-n_2} + v_3(1+t_a)^{-n_3}$$

---

[9] بودرامة مصطفى ، **مرجع سابق**، ص : 56

[10] منصوربن عوف عبد الكريم ، **مدخل الى الرياضيات المالية** ، ديوان المطبوعات الجامعية ، 2009، ص: 63-64

$$\Rightarrow 5000(1+0.07)^{-1} + 7000(1+0.07)^{-2} + 10000(1+0.07)^{-3}$$

$$= 4672{,}89 + 6114{,}07 + 8162{,}97$$

$$A = 18949{,}93\ DA$$

$$v(1+t)^{-n} = 18949{,}93\ DA$$

$$v(1+0{,}07)^{-5} = 18949{,}93\ DA$$

$$v = 26578.25\ DA$$

المثال التوضيحي الثاني:

أحد الأشخاص مدين بالديون التالية

50000 بعد ثلاث سنوات

10000 بعد 4 سنوات

15000 بعد 6 سنوات

اراد استبدالهم بدين وحيد مبلغه 50000

احسب مدة استحقاقه علما بأن معدل الخصم 05 %

الحل:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= 50000(1+0.05)^{-n} = 5000(1+0.5)^{-3} + 10000(1.05)^{-4} + 15000(1.05)^{-6}$$

$$50000(-n\ln\ (1.05)) = 23739{,}44$$

$$-n\ 50000\ \ln(1.05) = 23739{,}44$$

$$n = \frac{\ln 0.47}{\ln 1.05}$$

n= 15.26 يعني 15 سنة و3 أشهر وثلاثة أيام

تاريخ الاستحقاق المتوسط

يحسب تاريخ الاستحقاق المتوسط وفق القاعدة التالية:

$$\mathbf{(1+t)^{-n} = \frac{\sum(v_n(1+t)^{-n_i})}{\sum v_i}}$$

مثال توضيحي:

لدى تاجر 3 ديون

- الدين 1: 1000 تستحق بعد 1 سنة

- الدين 2: 2000 تستحق 2 سنوات

- الدين 3: 4000 تستحق 3 سنوات

أحسب تاريخ الاستحقاق المتوسط بمعدل 9 %

الحل : لدينا

$$(1+t)^{-n} = \frac{\sum(v_n(1+t)^{-n_i})}{\sum v_i}$$

ومنه:

$$(1+0.09)^{-n} = \frac{1000(1+0.09)^{-1} + 2000(1+0.09)^{-2} + 4000(1+0.09)^{-3}}{1000+2000+4000}$$

$$= \frac{917{,}43 + 1683{,}35 + 3088{,}73}{1000+2000+4000}$$

$$(1+0.09)^{-n} = 0.8127$$

$$-n\ln(1.09) = \ln(0.8127) = 1$$

مدة تاريخ المتوسط هي سنة واحدة

ملاحظة:

إذا كانت المدة غير تامة في عملية التوظيف فهناك طريقتين للحل:

- الطريقة الأولى: الطريقة الرياضية.

- الطريقة الثانية: الطريقة البنكية والتجارية.

أولا: الطريقة الرياضية

وتحسب وفق العلاقة الموالية:

$$\mathbf{c_{n+\frac{m}{12}} = c_0(1-t)^n\,(1+t)^{\frac{m}{12}}}$$

مثال توضيحي:

تم توظيف مبلغ بقيمة 70000 لمدة 2 سنوات و3 أشهر بمعدل فائدة 10%

أحسب الجملة المكتسبة أو الرصيد بالطريقة الرياضية

الحل: لدينا

$$c_{n+\frac{m}{12}} = 70000(1+0.1)^2\,(1+0.1)^{\frac{3}{12}}$$

$$c_{n+\frac{m}{12}} = 70000(1+0.1)^{\frac{24+3}{12}}$$

$$c_{n+\frac{m}{12}} = 86742{,}42\ DA$$

ثانيا: الطريقة البنكية

وهي الطريقة المستعملة في البنوك الحالية حيث تحسب الفائدة المركبة بالسنوات وبما يتعلق بالأيام أو الأشهر نستعمل الفائدة البسيطة وفقا للقانون التالي:

$$\mathbf{c_{n+\frac{m}{12}} = c_0(1+t)^n + c_0\,(1+t)^n \times \frac{t}{100} \times \frac{m}{12}}$$

بنفس معطيات المثال السابق ولكن باستخدام الطريقة البنكية التجارية

$$c_{n+\frac{m}{12}} = c_0(1+t)^n + c_0\,(1+t)^n \times \frac{t}{100} \times \frac{m}{12}$$

$$c_{n+\frac{m}{12}} = 70000(1+0.1)^2\left(1+\frac{30}{1200}\right)$$

$$c_{n+\frac{m}{12}} = 86817.5\ DA$$

يلاحظ من خلال حساب الرصيد بالطريقتين ان رصيد بالحل البنكي أكبر من الرصيد بالحل الرياضي بفارق يقدر ب: 75,08دج

المحور الثالث الدفعات

LES ANNUITÉ

الدفعات الدورية

أولا: تعريف

تعرف الدفعات المنتظمة او المتساوية بانها دفعات متساوية في القيمة تدفع على فترات زمنية متساوية وتحسب بحسب كيفية دفعها الى مايلي:[11]

- **دفعات فورية (دفعات الاستثمار):** وهي دفعات متساوية تدفع في أوائل الفترات الزمنية المتساوية ويطبق عليها بدفعات الاستثمار.

- **دفعات عادية (دفعات السداد):** وهي دفعات منتظمة تدفع في اخر الفترات الزمنية المتساوية، ويطلق عليها دفعات السداد.

يطلق على الدفعات المنتظمة او المتساوية بدفعات سنوية او جزئية وذلك حسبما تكون الفترة الزمنية التي تفصل بين كل دفعتين متتاليتين سنة كاملة او جزءا منها. ومن خصائص الدفعات المتساوية ان مبلغها ثابت او متساوي تاريخ اول دفعة او تحديد اخر دفعة ومعدل الفائدة متساوي وعدد الدفعات

ثانيا: الأقساط في نهاية المدة (الفترة)

ان دفعات نهاية المدة لدفع في النهاية مدة وعادة ما تكون لتسديد دين والدفعة الأخيرة يتم عندها حساب مبلغ رأس المال حيث:

V_n: الرصيد والقيمة المكتسبة

a : قيمة الدفعة.

t : المعدل

n : عدد الدفعات.

وبالتالي قانون حساب الجملة المكتسبة او الرصيد يكون وفق القاعدة الموالية

---

[11] محاضرات للدكتور سلمان معلا في جامعة حماة دمشق متاحة على الرابط ادناه https://www.dropbox.com/sh/p57zf4cq0bo23hs/AACcOctd-4jWSgxImtNfEwIba?dl=0&preview=%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A%D8%A7%D8%AA+%D9%85%D8%A7%D9%84%D9%8A%D8%A9+%D8%A7%D9%84%D9%85%D8%AD%D8%A7%D8%B6%D8%B1%D8%A9+%D8%A7%D9%84%D8%B1%D8%A7%D8%A8%D8%B9%D8%A9+%D9%88%D8%A7%D9%84%D8%AE%D8%A7%D9%85%D8%B3%D8%A9+.pdf

$$Vn = a\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

مثال توضيحي:

أحسب القيمة المكتسبة لـ 8 دفعات مبلغ كل منها 5000 بمعدل فائدة سنوي 7%

لدينا قانون الجملة المكتسبة للدفعات:

$$Vn = a\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

ومنه

$$Vn = 5000\left[\frac{(1.07)^8 - 1}{0.07}\right] = 51299{,}01\ DA$$

1- تحديد قيمة الدفعة:

يتم حساب وتحديد قيمة الدفعة من خلال القانون التالي:

$$a = \frac{Vnt}{(1+t)^n - 1}$$

مثال توضيحي:

كون أحد الأشخاص رأس مال وقدره 36630,6 بواسطة 5 دفعات تدفع في نهاية كل سنة بمعدل فائدة سنوي 10 %

ما هو مبلغ الدفعة؟

الحل :

لدينا قانون حساب الدفعات:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{Vnt}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}$$

$$a = \frac{36630{,}6.0{,}1}{(1+0.1)^5-1} = 6000\ DA$$

2- تحديد المعدل

يتم تحديد وحساب معدل التوظيف وفق القاعدة الموالية:

$$\mathbf{Vn}/_{\mathbf{a}} = \frac{(\mathbf{1}+\mathbf{t})^{\mathbf{n}}-\mathbf{1}}{\mathbf{t}}$$

مثال توضيحي:

من أجل تكوين راس مال يقدر بـــ 506023,90بدفعات نهاية المدة مبلغ كل منها 55000دج وعددها 7 دفعات

أحسب المعدل السنوي؟

من الجدول المالي رقم 3 نجد قيمة t عند n=7 و9.20 وبالتالي فالمعدل هو t=9%

ثالثا : تحديد عدد الدفعات (n)

لدينا:

$$\mathbf{Ln}\big((\mathbf{Vnt}+\mathbf{a}/\mathbf{a})\big)/\mathbf{Ln}(\mathbf{1}+\mathbf{t}) = \mathbf{n}$$

مثال توضيحي

من أجل تكوين راس مال يقدر بـــ 87999,0144دج بدفعات نهاية المدة مبلغ كل منها 15000دج وبمعدل 8%

المطلوب: حساب المعدل

الحل: لدينا قانون حساب المعدل

$$\boldsymbol{Ln}\big((\boldsymbol{Vn}\mathbf{t}+\mathbf{a}/\boldsymbol{a})\big)/\mathbf{Ln}(\mathbf{1}+\mathbf{t}) = \mathbf{n}$$

ومنه:

لدينا:

$$Ln\left(\left(87999{,}0144.0{,}08+\frac{15000}{15000}\right)\right)/\mathrm{Ln}(1+0{,}08)=5$$

ومنه عدد الدفعات هي n=5

3-تحديد القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة (دفعات السداد):

لنرمز للقيمة الحالية بالرمز (A_0) والجملة المكتسبة بالرمز Vn ومنه لدينا:

$$V_n=A_0\,(1+t)^n$$

ولدينا:

$$\boldsymbol{Vn}=\boldsymbol{a}\left[\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}}\right]$$

بتعويض قيمة الرصيد نجد

$$\boldsymbol{a}\left[\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}}\right]=A_0\,(1+t)^n$$

ولدينا:

$$\boldsymbol{Vn}=\boldsymbol{a}\left[\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}}\right]$$

ومنه:

$$\boldsymbol{A_0}=\boldsymbol{a}\left[\frac{\mathbf{1}-(\mathbf{1}+\boldsymbol{t})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{t}}\right]$$

مثال توضيحي

أراد احد الأشخاص اقتناء محل تجاري وبناء على ذللك يوظف في نهاية كل سنة مبلغ 40000 دج لمدة 6 سنوات بمعدل فائدة سنوي 7% احسب ثمن اقتناء المحل؟

الحل: لدينا من قانون حساب القيمة الحالية لدفعات السداد او دفعات نهاية المدة

لدينا:

$$A = \boldsymbol{a}\left[\frac{\mathbf{1}-(\mathbf{1}+\boldsymbol{t})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{t}}\right]$$

ومنه:

ومنه:

$$A = \mathbf{40000}\left[\frac{\mathbf{1}-(\mathbf{1}+\mathbf{0,07})^{-\mathbf{6}}}{\mathbf{0,07}}\right] = 190661{,}58\, DA$$

وبالتالي قيمة المحل التجاري هي: 190661,58 دج

ثانيا: الأقساط في بداية المدة (الفترة)

تعبر حصية الدفعات المتساوية او الدورية عن اجمالي المبالغ المتكونة نتيجة تراكم رؤوس الأموال المدفوعة بشكل دوري مع الفوائد في نهاية فترة الإيداع

وبافتراض ان:

V_n : الرصيد والقيمة المكتسبة

a : قيمة الدفعة.

t : المعدل

n : عدد الدفعات.

ومنه قانون حساب الرصيد او الجملة المكتسبة لدفعات بدياة المدة يكون وفق القاعدة الالية (بالاعتماد على قانون مجموع متتالية هندسية)

ومنه:

$$\boldsymbol{Vn = a\left[\frac{(1+t)^{n}-1}{t}\right](1+t)}$$

مثال توضيحي:

يريد شخص تكوين مبلغ 4000000 دج تساعده في شيخوخته، أودع في بنك معين في بداية كل سنة على 20 سنة وبمعدل فائدة سنوي 9 % فماهي قيمة القسط المدفوع

الحل:

لدينا قانون الجملة المكتسبة لدفعات التوظيف

ومنه:

$$Vn = \boldsymbol{a\left[\frac{(1+t)^{n}-1}{t}\right](1+t)}$$

ومنه:

$$a = Vn\left[\frac{t}{\boldsymbol{(1+t)^{n+1}-(1+t)}}\right]$$

وبالتالي:

ومنه:

$$a = 4000000\left[\frac{0{,}09}{\boldsymbol{(1+0,09)^{20+1}-(1+0,09)}}\right] = 71730.18DA$$

المحور الرابع استهلاك القروض

Amortissement Des Emprunts

مدخل حول استهلاك القرض

يقصد باستهلاك القرض سدادها وفوائدها، يتم الاتفاق على تسديد القروض وفوائد بأكثر من طريقة وسداد القروض العادية يتم بطريقتين هما

- استهلاك القرض بأقساط متساوية من راس المال فقط مع تسديد الفائدة المستحقة على الأرصدة المتبقية مع القسط المتساوي من راس المال.

- تسديد القرض بأقساط متساوية من راس المال والفوائد معا.

أولا: استهلاك القرض بأقساط متساوية من راس المال فقط مع تسديد الفائدة المستحقة على الأرصدة المتبقية مع القسط المتساوي من راس المال[12]

تتمثل هذه الطريقة في تسديد قسمة القرض او الأصل والذي يرمز له $(\mathbf{V_0})$ على أقساط متساوية خلال مدة القرض مع دفع فوائد الرصيد مع القسط المتساوي والذي يرمز له بـ (m) ، وبالتالي فان الرصيد المتبقي من القرض عبارة عن قيمة الأصل مطروح مه مجموع الأقساط المتساوية المسددة ، كما يتم حساب الفوائد المسددة عن القرض وفق القاعدة

$$\sum I = \frac{n}{2}[I_1 + I_n]$$

وهي عبارة عن مجموع متتالية حسابية حدها الأول هو I_1 ومجوع الحدود هو n

ويتم حساب الفائدة الأولى وفق القانون الموالي:

$$\mathrm{I}_1 = v_0\, t\bar{\mathrm{n}}$$

ويتم حساب الفائدة الأخيرة وفق القانون الموالي:

$$I_n = mt\bar{\mathrm{n}}$$

مثال توضيحي:

[12] عيد حامد أبوبكر، **رياضيات التمويل والاستثمار**، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الطبعة الثانية، 2015،ص ص: 436-437

اقترضت شركة لشراء الة صناعية مبلغها 50000 دج من أحد البنوك التجارية، على ان يسدد القرض على خمسة أقساط سنوية متساوية من الأصل فقط، ويسدد مع كل قسط فائدة الرصيد في اخر كل سنة، فاذا كان معدل الفائدة 10 % سنوي احسب كل من:

- القسط السنوي المتساوي

- المبلغ الواجب تسديده في نهاية كل سنة

- مجموع الفوائد المسددة مقابل خدمة الاقتراض

الحل:

1-القسط المتساوي من الأصل = أصل القرض / عدد الأقساط

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{v_0}}{\mathbf{n}}$$

ومنه

$$m = \frac{50000}{5} = 10000DA$$

2 – حساب فائدة السنة الأولى:

لدينا:

$$\mathrm{I}_1 = \boldsymbol{v_0}\, \boldsymbol{t}\bar{\mathrm{n}}$$

ومنه لدينا:

$$\mathrm{I}_1 = 50000 \times 0.1 \times 1 = 5000$$

3-القسط المسدد في نهاية السنة الأولى

$$\overline{m_1} = m + \mathrm{I}_1$$

ومنه:

$$\overline{m_1} = 10000 + 5000 = 15000\ DA$$

4 – الرصيد اخر السنة الأولى= الرصيد اول السنة – القسط المتساوي

= 50000- 10000= 40000

5 – فائدة السنة الثانية

$$I_2 = 40000 \times 0.1 \times 1 = 4000\ DA$$

6-القسط المسدد في نهاية السنة الثانية

$$\overline{m_2} = a + \mathrm{I}_2$$

$$\overline{m_2} = 10000 + 4000 = 14000DA$$

7 – الرصيد اخر السنة الثانية= الرصيد اول السنة الثانية – القسط المتساوي

= 40000-10000=30000 دج

8 – مجموع الفوائد المسددة:

لدينا: مجموع الفوائد تمثل مجوع متتالية حسابية وبالتالي فهي تحسب وفق القانون الموالي:

$$\sum I = \frac{n}{2}[I_1 + I_n]$$

ومنه:

$$\sum I = \frac{5}{2}[5000 + 1000] = 15000DA$$

ثانيا: استهلاك القروض بدفعات ثابتة

تتلخص هذه الطريقة بانه يتم سداد القرض وفوائده على أقساط متساوية تدفع بصفة دورية في نهاية كل فترة زمنية خلال مدة القرض وهذا يعني ان القسط الدوري المسدد في نهاية كل فترة يتكون من جزائيين هما قيمة الاستهلاك من أصل القرض، والفائدة المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض عن فترة زمنية معينة واحدة.

1-كيفية حساب القسط الثابت او المتساوي:

لدينا:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_n$$

ولدينا: الدفعة = الاستهلاك + الفائدة للمبلغ المتبقي

$$a = m_i + I_i$$

حيث:

$$I_n = v_{n-1}t$$

2-العلاقة بين العناصر المكونة لاستهلاك القرض للدفعات الثابتة

2-1- العلاقة بين الاستهلاكات:

يلاحظ ان مجموع الاستهلاكات تمثل مجموع متتالية هندسية وبالتالي يطبق عليها قانون المتتالية الهندسية من ناحية المجموع او عبارة الحد العام ومنه يستنتج مايلي :

$$m_n = m_{n-1}(1+t)$$

2-2 - العلاقة بين الاستهلاك الأخير والدفعة الأخيرة:

لدين قيمة القرض في نهاية الدفعات معدومة وبالتالي:

$$v_n = 0$$

ومنه: $m_n - m_{n-1} = 0 \leftrightarrow m_n = v_{n-1}$

وبالتالي يكون:

$$I_n = m_n t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ولدينا:

$$a = m_n + I_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بتعويض قيمة الفائدة من (1) في (2) نجد:

$$a = m_n + m_n t$$

أي:

$$a = m_n(1+t)$$

2-3- العلاقة بين راس المال واستهلاك القرض:

لدينا كما ذكر سابقا ان مجموع الاستهلاكات تمثل مجموع متتالية هندسية وبالتالي يتم تطبيق قانون مجموع المتتاليۃ الهندسية على استهلاك القرض الثابت مما يلاحظ ما يلي :

$$v_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + \cdots + m_n$$

$$v_0 = m_1 + m_1(1+t) + m_1(1+t)^2 + m_1(1+t)^3 + m_1(1+t)^4 + \cdots + m_1(1+t)^{n-1}$$

ومنه:

$$v_0 = m_1 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

2-4-العلاقة بين الدفعات وراس المال :

$$v_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

2-5 -العلاقة بين الفائدة واستهلاك القرض

لدينا: الدفعات ثابتة وبالتالي

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_n$$

ولدينا:

$$a = m_i + I_i$$

لدينا $a_1 = a_2 \;\ldots\ldots\ldots.\; (1)$

ولدينا أيضا: ولدينا:

$$a_1 = m_1 + I_1 \ldots \ldots \ldots . (2)$$

ولدينا أيضا

$$a_2 = m_2 + I_2 \ldots \ldots \ldots \ldots . . (3)$$

بتعويض (2) و(3) في (1) نجد:

$$m_1 + I_1 = m_2 + I_2$$

ونحن نعلم ان الفائدة تتناقص بتناقص راس المال وبالتالي:

$$I_1 - I_2 = m_2 - m_1$$

6-2- العلاقة بين الفوائد الاخيرة والمعدل

لدينا:

$$v_n = o$$

$$m_n - m_{n-1} = 0 \leftrightarrow m_n = v_{n-1} \dots \dots \dots . . (1)$$

$$I_{n-1} = v_{n-2}t$$

$$v_{n-1} = \ v_{n-2} - m_{n-1} \dots\dots (2)$$

بتعويض قيمة (1) في (2) نجد:

$$m_n = \ v_{n-2} - m_{n-1} \leftrightarrow m_n + m_{n-1} = v_{n-1}$$

ولدينا:

$$m_n = m_{n-1}(1 + t)$$

ومنه

$$1 + t = \frac{I_n}{I_{n-1} - I_n}$$

بتعويض I_n بما يساويها نجد:

$$1 + t = \frac{m_n t}{(m_n + m_{n-1})t - m_n t}$$

ومنه:

$$1+t=\frac{m_n t}{(m_n t+m_{n-1}t)-m_n t}$$

ومنه:

$$1+t=\frac{m_n}{m_{n-1}}$$

وبالتالي:

$$\boldsymbol{1+t=\frac{I_n}{I_{n-1}-I_n}}$$

2-7- العلاقة بين القسط الثابت واستهلاك القرض الأول

لدينا:

$$a_1=m_1+I_1 \dots\dots\dots\dots..(1)$$

و

$$a_1=a_2=a_3=a_n=a$$

ولدينا:

$$v_0=m_1\,\frac{(1+t)^n-1}{t}\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(2)$$

ولدينا:

$$I_1=v_0 t\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(3)$$

بتعويض (3) و(2) في (1) نجد:

$$a_1=m_1+m_1\,\frac{(1+t)^n-1}{t}\,t$$

ومنه:

$$a_1 = m_1 + m_1 \frac{(1+t)^n - 1}{t} t$$

وبالتالي

$$a_1 = m_1 + m_1(1+t)^n - m_1$$

ومنه:

$$\boldsymbol{a_1 = m_1(1+t)^n}$$

مثال توضيحي الاول:

اقترض شخص مبلغ قد 10000 دج من أحد البنوك بمعدل فائدة 5 % سنويا واتفق على سداد هذا القرض على أقساط متساوية سنويا خلال خمس سنوات

المطلوب: احسب قيمة الدفعة الثابتة، والاستهلاك الأول والثاني

الحل :

لدينا:

1-حساب قيمة الدفعة الثابتة:

$$v_0 = a \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

ومنه

$$10000 = a \frac{1-(1+0{,}05)^{-5}}{0{,}05} = 2309.74\, DA$$

2-حساب الاستهلاك الأول

لدينا:

$$v_0 = m_1 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

ومنه:

$$10000 = m_1 \frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05} = 1809.74$$

ويمكننا حسابه بالعلاقة التالية:

ومنه:

$$m_1 = a_1(1+t)^{-n}$$

ومنه:

$$m_1 = 2309.74(1+0,05)^{-5}$$

$$m_1 = 1809,74\ DA$$

3-حساب الاستهلاك الثاني:

لدينا:

$$m_n = m_{n-1}(1+t)$$

ومنه

$$m_2 = m_1(1+t)$$

$$m_2 = 1809,74(1+0,05) = 1900.227\ DA$$

المثال التوضيحي الثاني:

اقترض شخص مبلغا من أحد البنوك التجارية واتفق على سداده على خمس أقساط سنوية متساوية بمعدل فائدة 8% سنويا، فاذا علمت ان استهلاك السنة الثالثة يقدر بـ 5979,68 دج احسب ما يلي:

- الاستهلاك الأول

- قيمة الدفعة الثابتة

- قيمة القرض

الحل:

1-حساب قيمة الاستهلاك الأول

لدينا :

$$m_n = m_{n-1}(1+t)$$

$$m_1 = m_3(1+t)^{-2}$$

$$m_1 = 5979.68(1+0.08)^{-2}$$

$$m_1 = 5126.61\ DA$$

2-حساب قيمة الدفعة الثابتة

لدينا:

$$_1 = a_1(1+t)^{-n}$$

ومنه:

$$a = m_1(1+t)^n$$

$$a = 5126.61(1+0.08)^5$$

$$a = 7532.67\ DA$$

3-قيمة القرض

هناك عدة طرق لحساب قيمة الأصل او القرض:

- الطريقة الاولي باستخدام الدفعة الثابتة:

$$v_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$v_0 = 7532.67\frac{1-(1+0,08)^{-5}}{0,08} = 30075,76\ DA$$

- الطريقة الثانية: باستخدام استهلاك القروض

لدينا:

$$v_0 = m_1 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$v_0 = 5126.61 \frac{(1+0,08)^5 - 1}{0,08} = 30075,76\ DA$$

المراجع

- بودرامة مصطفى، **الرياضيات مالية**، البدر للنشر والتوزيع، الجزائر، 2005

- ابراهيم موسى عبد الفتاح، حسن محمد علي، **مقدمة في رياضيات المال والاستثمار** ، مكتبة المدينة زقازيق، 2000

- عبد الكريم عوف، مبادئ في الرياضيات مالية، الجزائر، 2009

- عيد حامد أبوبكر، **رياضيات التمويل والاستثمار**، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الطبعة الثانية، سنة 2015

- محاضرات للدكتور سلمان معلا في جامعة حماة دمشق متاحة على الرابط ادناه
https://www.dropbox.com/sh/p57zf4cq0bo23hs/AAApOmw6_t8HbjiWL46PmLONa/%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A%D8%A7%D8%AA%20%D9%85%D8%A7%D9%84%D9%8A%D8%A9%20%D9%85%D8%AD%D8%A7%D8%B6%D8%B1%D8%A9%20%D8%A7%D9%84%D8%AB%D8%A7%D9%86%D9%8A%D8%A9%20%D9%88%D8%AB%D8%A7%D9%84%D8%AB%D8%A9%20.pdf?dl=0

- بن سديرة عمر ، محاضرات في الرياضيات مالية موجه للسنة ثانية ، جامعة فرحات عباس 2010،

- محاضرات للدكتور سلمان معلا في جامعة حماة دمشق متاحة على الرابط ادناه
https://www.dropbox.com/sh/p57zf4cq0bo23hs/AACcOctd-4jWSgxImtNfEwIba?dl=0&preview=%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A%D8%A7%D8%AA+%D9%85%D8%A7%D9%84%D9%8A%D8%A9+%D8%A7%D9%84%D9%85%D8%AD%D8%A7%D8%B6%D8%B1%D8%A9+%D8%A7%D9%84%D8%B1%D8%A7%D8%A8%D8%B9%D8%A9+%D9%88%D8%A7%D9%84%D8%AE%D8%A7%D9%85%D8%B3%D8%A9+.pdf

-Walder Masiéri , **Mathématiques financières**, Edition Dalloz, paris ,2001

-HamaniAllal, **Mathématiques financières,** opu, volume1,1994

- http://coursgratuits.canalblog.com/archives/2008/11/26/11521054.html

-Cours et exercices de mathématiques financières
http://coursgratuits.canalblog.com/archives/2008/11/26/11521054.html