الفصل الثاني

التقدير : Estimation

1.2 مقدمة:

المقصود بالتقدير هو تقدير معالم المجتمع الإحصائي (أو التوزيع الاحتمالي) والتي غالباً ما تكون مجهولة ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها -عادة- من بيانات العينة فقد يكون المطلوب تقدير متوسط دخل الدولة، أو تقدير متوسط عمر الناخب... وغيرها.

وهناك نوعان (أو أسلوبان) للتقدير يسمى الأول تقدير النقطة (أو القيمة الواحدة)، ويسمى الثاني تقدير الفترة (أو فترة التقدير أو الثقة).

ففي حالة تقدير النقطة نحصل على قيمة واحدة من العينة، وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب أو كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة. فمثلاً لو أخذنا الوسط الحسابي للدخل في العينة كتقدير لمتوسط الدولة نكون قد حصلنا على تقدير نقطة لمتوسط دخل الدولة. وكمثال آخر لو أخذنا نسبة الناخبين في العينة الذين يؤيدون مرشحا معيناً كتقدير لهذه النسبة في المجتمع نكون حصلنا على تقدير نقطة للنسبة في مجتمع الناخبين

أما في تقدير الفترة أو فترة التقدير فنحصل على مدى Range أو فترة تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى) - نحصل عليهما من العينة. ونلاحظ هنا أن فترة التقدير (أو تقدير الفترة) تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائياً في كثير من الحالات. فمثلاً : إذا قدرنا أن الوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح بين: 6,40 + 40 6 - سنة أي يتراوح بين : 34 سنة كحد أدنى و 46 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير فترة للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع - ونلاحظ أن هذه الفترة (34, 46) تحتوي على عدد لا نهائي من الأعمار، بمعنى أن العدد لا يقتصر فقط على الأعداد الصحيحة والتي تشمل السنوات، ولكنها تشمل أيضا كسور السنوات، والأيام والشهور، والساعات... الخ وسوف نرى كيف نحدد فترة التقدير هذه في بعض الحالات.

وتتميز تقديرات الفترة بالإضافة إلى أنها تحتوي على عدد كبير جداً من القيم، بأنه يمكن حساب احتمال أن يكون التقدير صحيحاً، وبالتالي فإنه يمكن معرفة مدى دقة التقديرات. لذا فإن فترات التقدير تسمى أيضاً " فترات الثقة " Confidence intervals

لأن هـذه الفترات تعتمـد في تكوينهـا الإحصـائي على درجـات أو مسـتويات ثقـة معينـة Confidence Levels مثل 95% أو 99 % وغيرها، بمعنى أن احتمال أن تكون فترة التقدير صحيحة هو 0.95 أو 0.99 وهكذا...

فإذا كان متوسط أعمار الناخبين يتراوح ما بين 46 و 34 سنة، ودرجة الثقة هي 95 % فإن هذا معناه أنه لو تكررت التجربة مائة مرة، فإن التقدير سيكون محصوراً بين هذين الرقمين في 95 من الحالات (أي احتمال أن يكون صحيحاً هو 95%).

2.2 فترة تقـدير الوسـط الحسـابي للمجتمـع في حالـة العينـات الكبيرة (فترة الثقـة للوسط):

إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة ذا توزيعاً طبيعياً وتباينه معروفاً أو كانت العينة كبيرة (أي حجمها ثلاثون مفردة أو أكثر) فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي يكون توزيعاً طبيعياً، وطالما نحن نتكلم عن تقدير متوسط المجتمع فإن أول ما نفكر فيه هو الوسط الحسابي للعينة. وفترة التقدير (أو الثقة) للوسط الحسابي للمجتمع تأخذ الشكل التالي :

تقدير متوسط المجتمع = الوسط الحسابي للعينة ± الخطأ المعياري للوسط وبالرموز فإن :

$$\boxed{\mu = \bar{X} \pm 1\sigma\bar{x}}$$

حيث μ تقدير الوسط الحسابي للمجتمع، $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي للعينة، $\sigma_{\bar{x}}$ هو الخطأ المعياري للوسط، + تشير للجمع فنحصل على الحد الأعلى لفترة التقدير، - تشير للطرح فنحصل على الحد الأدنى، ولكن احتمال أن يكون هذا الكلام صحيحا هو 68.26 % فقط، أي أن درجة الثقة هنا لا تتعدى % 68.26 فإذا أضفنا وطرحنا ضعف الخطأ المعياري يرتفع الاحتمال إلى 95.44% أي ترتفع درجة الثقة إلى % 95.44 وفي هذه الحالة تأخذ فترة الثقة الشكل التالي :

$$\boxed{\mu = \bar{X} \pm 2\sigma\bar{x}}$$

وإذا أضفنا وطرحنا ثلاثة أمثال الخطأ المعياري يصبح الاحتمال % 99.72 أي ترتفع درجة الثقة إلى 99.72% وتأخذ فترة الثقة الشكل التالي :

$$\boxed{\mu = \bar{X} \pm 3\sigma\bar{x}}$$

أي أنه بزيادة درجة الثقة يزيد طول الفترة. ومما سبق نلاحظ ما يلي :

1 - أن هناك علاقة وثيقة بين درجة الثقة والرقم أو " المعامل المضروب في الخطأ المعياري فهو إما 1 أو 2 أو 3 على حسب درجة الثقة 68.26% أو 95.44% أو 99.72 % ولذلك فإن هذا المعامل هو الذي يسمى " معامل الثقة ". فبناء على درجة الثقة المطلوبة يتحدد معامل الثقة.

2 - أن درجات ومعاملات الثقة التي ذكرناها تخص التوزيع الطبيعي، وأن المعاملات 1 أو 2 أو 3 ما هي إلا الدرجة المعيارية (Z) والتي نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وذلك بقسمة درجة الثقة (أو الاحتمال) على 2 (حيث أن المساحة موزعة بالتساوي على يمين ويسار الوسط) ثم بالكشف في المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري عن خارج القسمة (أو أقرب رقم له) فنحصل على Z المقابلة وهذا يرجع إلى أن توزيع المعاينة للوسط هو التوزيع الطبيعي.

3 - يمكن الحصول على فترات تقدير بأي درجة ثقة أخرى (غير الثلاث التي ذكرناها) وذلك بقسمة درجة الثقة المطلوبة - كما ذكرنا - على 2 ثم الكشف في المساحات حتى نحصل على Z المناسبة.

4 - والخلاصة : أن فترة التقدير (أو الثقة) للوسط الحسابي للمجتمع تأخذ الشكل التالي:

$$\boxed{\mu = \bar{X} \pm Z\sigma_{\bar{\chi}}}$$

حيث تحدد Z درجة الثقة المطلوبة. وحيث أن الخطأ المعياري للوسط $\sigma_{\bar{\chi}}$ يأخذ الشكل التالي.

$$\boxed{\sigma_{\bar{\chi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

فإن فترة تقدير الوسط تأخذ الشكل النهائي التالي :

$$\boxed{\mu = \bar{X} \pm Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ويمكن تلخيص خطوات تقدير الوسط الحسابي للمجتمع فيما يلي :

أ – احسب الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$.

ب- احسب الخطأ المعياري للوسط $\sigma_{\bar{\chi}}$ والذي يساوي $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

جـ - أضـرب الخطـأ المعيـاري للوسـط في معامـل الثقـة المناسـب (أو الدرجـة المعياريـة) حسب درجة الثقة المطلوبة أي أحسب $Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

د- اطرح حاصل الضرب السابق من الوسط الحسابي للعينة فنحصل على الحد الأدنى لفترة التقدير، واجمع حاصل الضرب مرة أخرى على الوسط الحسابي للعينة فتحصل على الحد الأعلى لفترة التقدير.

5- يمكن كتابة أشهر وأهم درجات ومعاملات الثقة (للتوزيع الطبيعي) في الجدول التالي (مع ملاحظة أن 95%، 99% هي أشهرها على الإطلاق)

درجة الثقة	معامل الثقة Z
68.26%	1
90%	1.65
95 %	1.96
95.44%	2
99%	2.58
99.72%	3

6- إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ غير معروف - وهو غالبا ما يحدث في الواقع – فيمكن استخدام الانحراف المعياري للعينة S بدلا منه طالما كان حجم العينة كبيرا بدرجة كافية وتصبح فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع كما يلي :

$$\boxed{\mu = \overline{X} \pm Z\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

ولإيضاح هذه النقطة بشيء من التفصيل نأخذ المثال التالي :

مثال: لو أردنا معرفة متوسط الدخل اليومي لمجموعة من الناخبين في دولة ما، فإن ذلك يبدو أمرا صعباً من الناحية العملية نظراً لكبر حجم مجتمع الناخبين، إضافة

إلى طول الوقت والتكاليف. لذا فإن الأسلوب العلمي المتبع في حالة كهذه هو اختيار عينة عشوائية نستطيع من خلال معرفة نتائجها تقدير متوسط دخول الناخبين في هذه الدولة.

فلو سحبت عينة عشوائية من مجموع مجتمع الناخبين في دولة ما حجمها 100 ناخب فإذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري للدخل اليومي للناخبين بالعينة هما على الترتيب 90 دولار و 25 دولار، أوجد فترة تقدير للوسط الحسابي للدخل اليومي لمجموع الناخبين في هذه الدولة بدرجة ثقة 95% ؟

الحل :

بما أن فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع هي :

$$\boxed{\hat{\mu} = \bar{X} \pm Z \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

والمعلومات المعطاة هي :

حجم العينة n = 100

الوسط الحسابي للعينة $\bar{X} = 90$

والانحراف المعياري للعينة S = 25

وحيث أن درجة الثقة هي 95 % فإن : Z = 1.96 حسب ما هو موضح في الجدول السابق. وبالتالي فإن فترة تقدير الوسط الحسابي للدخل اليومي لمجتمع الناخبين بدرجة ثقة 95 % هي :

$$\hat{\mu} = 90 \pm 1.96 \frac{25}{\sqrt{100}}$$

$$= 90 \pm 1.96(2.5)$$

$$= 90 \pm 4.9$$

$$\mu = \begin{cases} 85.1 \\ 94.9 \end{cases}$$

أي أن الوسط الحسابي للدخل اليومي لمجتمع الناخبين يتراوح بين 85.1 دولاراً كحد أدنى، 94.9 كحد أعلى، وذلك بدرجة ثقة 95 %.

3.2 فترة تقدير النسبة للمجتمع (أو فترة الثقة للنسبة):

إن تقدير النسبة في المجتمع تعتبر من الحالات المهمة لقياس الظواهر السياسية، وبالذات الوصفية منها كقياس اتجاهات الرأي العام، وقياس نسبة قتلى الحروب، ونسبة الدول التي أوفت بالتزاماتها في المنظمات الدولية أو الإقليمية... وغيرها ونظراً لأنه من الصعوبة بمكان في كثير من الأحيان حساب هذه النسبة مباشرة من المجتمع، فإننا غالبا ما نلجأ لتقدير هذه النسبة من عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع.

فلو افترضنا أن نسبة المؤيدين للسياسة الاقتصادية التي تنتهجها دولة ما هي P وأن العينة العشوائية كبيرة بدرجة كافية وأن نسبة مؤيدي هذه السياسة في العينة هي $\hat{P}$ فإن خطوات تقدير النسبة في المجتمع تكون كما يلي :

أ- احسب النسبة في العينة $\hat{P}$.

ب- احسب الخطأ المعياري للنسبة والتي تساوي في هذه الحالة :

$$\boxed{\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$$

جـ- اضرب الخطأ المعياري للنسبة في معامل الثقة المناسب Z (حسب درجة الثقة المطلوبة) والتي نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (أو من الجدول الذي يحوي أهم درجات ومعاملات الثقة والذي ذكرناه آنفاً). أي نحسب:

$$\boxed{Z.\sigma_{\hat{P}} = Z\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$$

د – للحصول على الحد الأدنى لتقدير النسبة نطرح حاصل الضرب (السابق) من نسبة العينة $\hat{P}$ و للحصول على الحد الأعلى نجمع حاصل الضرب مع النسبة في العينة فنحصل على فترة تقدير النسبة. وبالتالي فإن فترة تقدير النسبة تكون في شكلها النهائي كما يلي :

$$\boxed{P = \hat{P} \pm Z\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$$

ولتوضيح هذه الخطوات بشيء من التفصيل نورد المثال التالي :

مثال (2) : عينة عشوائية حجمها 144 ناخباً سحبت من إحدى المدن فوجد أن عدد المؤيدين في العينة لمرشح معين هو 60 ناخباً، أنشئ فترة تقدير لنسبة المؤيدين لهذا المرشح في المدينة كلها بدرجة ثقة % 95.

الحل :

1- نحسب أولاً نسبة المؤيدين للمرشح في العينة $\hat{P}$ التي نحصل عليها بقسمة عدد المؤيدين له على العدد الكلي للعينة (حجم العينة) أي أن :

$$\hat{P} = \frac{60}{144} = 0.42$$

وحيث أن درجة الثقة المطلوبة هي % 95 فإن معامل الثقة المناسب هو: 196 = Z

وفترة تقدير نسبة المؤيدين لهذا المرشح في المدينة تأخذ الشكل التالي :

$$\boxed{P = \hat{P} \pm z\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$$

وبالتعويض عن حجم العينة $n = 144$

والنسبة في العينة $\hat{P} = 0.42$ ، $1-\hat{P} = 1-0.42 = 0.58$

ومعامل الثقة $Z = 1.96$

نحصل على :

$$P = 0.42 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.42 \times 0.58}{144}}$$

$$= 0.42 \pm 0.08$$

$$\therefore P \begin{cases} 0.34 \\ 0.50 \end{cases}$$

أي أن نسبة المؤيدين للمرشح في المدينة تتراوح بين 0.34 , 0.50 وذلك بدرجة ثقة % 95 بمعنى آخر أن نسبة مؤيدي هذا المرشح في هذه المدينة لا تتجاوز % 50 كحد أعلى، وبالتالي ففرصته في الفوز كمرشح قد لا تكون كبيرة وذلك بدرجة ثقة % 95 بمعنى أن هذا الحكم لا تتجاوز نسبة الخطأ فيه % 5.

4.2 تحديد حجم العينة لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع :

يعتبر تحديد حجم العينة المناسب من المشاكل المهمة والشائعة التي تواجه الباحثين في مختلف المجالات، وبالذات عند دراسة الظواهر السياسية، ويختلف تحديد حجم العينة باختلاف الهدف من التقدير.

فإذا كان المطلوب هو تقدير الوسط الحسابي للمجتمع، فإن فترة تقدير الوسط هي كما سبق وأن أوضحنا :

$$\mu = \overline{X} \pm Z.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ومنها نجد أن حجم العينة يأخذ الشكل التالي :

$$\boxed{n = \frac{Z^2\sigma^2}{e^2}}$$

حيث :

Z هو معامل الثقة (أو الدرجة المعيارية) المقابل لدرجة الثقة المطلوبة، ونحصل عليا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

$\{\sigma^2\}$ هو تباين المجتمع (أو هو مربع الانحراف المعياري).

e هو أقصى خطأ مسموح به في تقدير الوسط، وهو عادة ما يحدده الباحث، وتتوقف على أهمية الموضوع أو الظاهرة السياسية المراد دراستها، ومدى الدقة المطلوبة في التقدير، ويسمى اختصاراً "الخطأ في تقدير الوسط".

ولتوضيح كيفية تحديد حجم العينة المناسب عند تقدير الوسط الحسابي للمجتمع، نأخذ المثال التالي :

مثال (3):

إذا كانت دخول الأفراد اليومية في إحدى دول العالم النامية تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 15$ دولاراً، فما هو حجم العينة المناسب لتقدير متوسط دخول الأفراد في هذه الدولة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقدير متوسط الدخل اليومي 5 دولارات، وذلك بدرجة ثقة 99 % ؟

الحل :

في هذا المثال نجد أن :

درجة الثقة 99 % أي أن : $Z = 2.58$

أقصى خطأ مسموح به هو 5 دولارات، أي أن : $e = 5$

والانحراف المعياري للمجتمع : $\sigma = 15$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة التي تحدد حجم العينة وهي :

$$n = \frac{Z^2.\sigma^2}{(e)^2} = 59.9 = 60$$

فإن حجم العينة مقرباً لأقرب عدد صحيح هو :

$$n = \frac{(2.58)^2 (15)^2}{5^2} \approx 60$$ فرداً

أي أنه يجب على الباحث أن يأخذ عينة لا يقل حجمها عن 60 فرداً حتى يكون لديه تقديراً دقيقاً عن متوسط دخول الأفراد في هذه الدولة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقديره لمتوسط الدخل عن خمس دولارات، وذلك بدرجة ثقة 99 %.

5.2 تحديد حجم العينة لتقدير النسبة في المجتمع :

وبالطريقة نفسها يمكن تحديد حجم العينة اللازمة للحصول على درجة ثقة معينة عند تقدير النسبة في المجتمع بافتراض أن اقصى خطأ في التقدير مسموح به هو e تبعاً للمعادلة التالية:

$$\boxed{n = \frac{Z^2.P(1-P)}{e^2}}$$

حيث :

Z هو معامل الثقة (أو الدرجة المعيارية) المقابل لدرجة الثقة ونحصل عليه من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

P هي النسبة في المجتمع (أو تقدير لها).

1 - P هي النسبة المكملة. بمعنى إذا كانت نسبة المؤيدين 60 % فإن نسبة غير المؤيدين 40 %

e أقصى خطأ في التقدير مسموح به. "أو الخطأ في تقدير النسبة".

أي أن حجم العينة المناسب في هذه الحالة يساوي حاصل ضرب مربع z في النسبة، ثم في النسبة المكملة مقسوماً على مربع الخطأ المسموح به كما في المثال التالي:

مثال (4) : يدعي أحد مراكز استطلاعات الرأي العام أنه عند دراسته لاتجاهات آراء الناخبين لاثنين من المتنافسين على أحد مقاعد السلطة التشريعية بأن نتائج دراسته هي من الدقة بحيث لا يتعدى نسبة الخطأ في التقدير 2%، فما هو حجم العينة المناسب التي نستطيع من خلالها الحكم على مدى صحة إدعاء هذا المركز بافتراض أن نسبة المؤيدين للمرشح هي 50 % وذلك بدرجة ثقة 95 %.

الحل :

بما أن درجة الثقة 95 % فإن : Z = 1.96 بافتراض أن نسبة المؤيدين للمرشح هي

P= 0.5

وبالتالي فإن النسبة المكملة P - 1 هي :

1- P = 1 - 0.5 = 0.5

وحيث أن أقصى خطأ مسموح به هو :

e = 0.02

فإن حجم العينة اللازم هو :

$$\boxed{n = \frac{Z^2 . P(1-P)}{e^2}}$$

وبالتعويض نحصل على :

$$n = \frac{(1.96)^2 (0.5)(0.5)}{(0.02)^2}$$

$$\therefore n = \frac{0.9604}{0.0004}$$

$$\therefore n = 2401$$

أي أن حجم العينة المناسب الذي يعطي درجة الدقة المطلوبة هو 2401 ناخب. بمعنى آخر فإن على هذا المركز أن يستطلع حجم عينة لا يقل عددها عن هذا العدد.

6.2 توزيع t - Distribution : t

تناولنا فيما سبق التقدير الإحصائي للوسط الحسابي للمجتمع في الحالات التي يكون فيها الانحراف المعياري للمجتمع معلوماً، و (أو) أن العينة كبيرة بدرجة كافية. ولكن إذا كانت العينة صغيرة بمعنى أن حجمها أقل من (30) مفردة، والانحراف المعياري للمجتمع الطبيعي غير معلوم، فإن التوزيع الإحصائي المتبع في مثل هذه الحالات هو ما يطلق عليه " توزيع t " فعند تقدير متوسط عمر الناخب في مدينة ما عن طريق سحب عينة صغيرة (حجمها أقل من 30 ناخب) التوزيع الطبيعي يكون في مثل هذه الحالات غير مناسب لصغر حجم العينة أولاً، ثم عدم معرفة الانحراف المعياري لعمر الناخب ثانياً. لذا فإن الأسلوب الإحصائي المتبع في حالات كهذه هو استخدام " توزيع t " والذي يسميه البعض "توزيع العينات الصغيرة".

ولعل الاختلاف الأساسي بين توزيع t والتوزيع الطبيعي هو أن الانحراف المعياري للعينة هو المستخدم في الأول بدلا من الانحراف المعياري للمجتمع في الثاني، وفيما عدا ذلك فالتوزيعان متماثلان وكلما زادت قيمة n كلما اقترب توزيع t من توزيع z ويعتمد توزيع t على ما يعرف بدرجات الحرية DEGREES OF FREEDOM والتي يرمز لها بالرمز اللاتيني (ميو).

7.2 درجات الحرية :

تعرف درجات الحرية بأنها عدد المشاهدات المستقلة في العينة والتي تساوي حجم العينة مطروحاً منه عدد القيود أو معالم المجتمع التي يتم تقديرها من بيانات العينة.

وكمثال مبسط لشرح فكرة درجات الحرية نفترض أن لدينا 3 قيم واشترطنا أن مجموع القيم يساوي 10 فإن لدى الباحث في هذه الحالة حرية في اختيار الرقم الأول (وليكن 2) والثاني (وليكن 3) لذلك فإن قيمة الثالثة لابد وأن تكون (5) بالتالي نستطيع القول بأن درجة الحرية المتاحة لدى الباحث هي (2) أي 1 - 3 = 2 أي أن درجات الحرية في هذه الحالة هي :

$$n - 1$$

حيث n تساوي حجم العينة (والتي تساوي في المثال السابق 3)

والرقم (1) والذي طرحناه يعني الشرط الذي يحتم أن مجموع القيم = 10 وبصفة عامة إذا كان عدد القيود k فإن درجات الحرية تساوي n - k

شروط توزيع t.

ويمكن تحديد الشروط الثلاثة لاستخدام توزيع t كما يلي:

1 - أن يكون المجتمع المسحوبة منه العينة له توزيع طبيعي.

2 - والانحراف المعياري للمجتمع σ غير معروف (أو مجهول).

3 - والعينة صغيرة (حجمها أقل من 30 مفردة).

8.2 تقدير الوسط الحسابي للمجتمع في حالة العينات الصغيرة :

تأخذ فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع في حالة العينات الصغيرة الشكل التالي :

$$\hat{\mu} = \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

ولعل من أهم الملاحظات على المعادلة الإحصائية السابقة احتواؤها على مفهومين مهمين هما :

1) مستوى المعنوية أو الدلالة Level of Significance والذي رمزنا له بالرمز اللاتيني ألفا α والذي يعني أنه المكمل لدرجة الثقة أي نسبة الخطأ. وبالتالي فإذا كانت درجة الثقة 99 % أي احتمال أن يكون التقدير صحيحاً بنسبة 99 %، فإن مستوى المعنوية، والذي يعني هنا درجة احتمال الخطأ يساوي 1%. وعند الكشف في جدول(t)، ولأنه توزيع متماثل، فإنه يتم قسمة مستوى المعنوية على 2.

2) درجات الحرية، وهو ما سبق شرحه ويساوي في هذه الحالة n - 1. حيث n هو حجم العينة وطرحنا منه 1 لأنه تم تقدير الانحراف المعياري للمجتمع المجهول باستخدام الانحراف المعياري للعينة S.

مثال (5) : إذا كانت دخول مجموعة من الأفراد في دولة ما تتبع التوزيع الطبيعي، وسحبت منهم عينة عشوائية حجمها 10 أفراد بوسط حسابي دولاراً $\bar{X} = 72$ وانحراف معياري بلغ دولاراً S= 6.4 أنشئ فترة تقدير للوسط الحسابي للدخل اليومي لجميع الأفراد بدرجة ثقة % 95

الحل :

نلاحظ أولاً: أن العينة صغيرة (حجمها 10 أفراد فقط) وأن المجتمع طبيعي وانحرافه المعياري غير معروف لذلك نستخدم فترة تقدير الوسط للعينات الصغيرة التي تعتمد على توزيع t

وحيث أن n = 10 فإن درجات الحرية لها هي :

n -1 = 10 - 1 = 9

وحيث أن درجة الثقة المطلوبة هي $1-\alpha = 0.95$ فإن مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ وبالتالي فإن نصف مستوى المعنوية هو :

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

أي يتم الكشف في جدول (II) عند درجات حرية تساوي 9 تحت احتمال (نصف مستوى المعنوية) 0.025 أي أن :

$$t_{0.025,9} = 2.262$$

وبالتعويض عن فترة تقدير الوسط نحصل على المعادلة التالية :

$$\hat{\mu} = \overline{X} \pm t \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{\mu} = 72 \pm 2.262 \frac{6.4}{\sqrt{10}}$$

$$\hat{\mu} = 72 \pm \frac{14.48}{3.16}$$

$$\hat{\mu} = 72 \pm 4.6$$

$$\therefore \hat{\mu} = \begin{cases} 67.4 \\ 76.6 \end{cases}$$

أي أن الوسط الحسابي للدخول اليومية يتراوح بين 67.4 دولاراً كحد أدنى. 76.6 دولاراً كحد أعلى وذلك بدرجة ثقة 95 %.

تمارين متنوعة (نظرية التقدير) مع الحلول المختصرة

التمرين الأول:

يعتبر وزن الصابون المسحوق الذي تضعه آلة صناعية متغيرا عشوائيا من علبة إلى أخرى مقارنة بالوزن المعياري، نريد أن نقدر الوزن المتوسط μ الحقيقي لوزن الصابون في العلبة الواحدة، لهذا الغرض أخذت عينة من 10 علب من الإنتاج وتم وزنها بدقة فكانت النتائج التالية (بالغرام):

597 606 600 603 599 602 600 605 598 595

إذا علمت أن وزن الصابون المسحوق يتوزع طبيعيا:

1- أعط تقديرا نقطيا لكل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري الحقيقيين للمجتمع؟ $(3{,}5g \quad ، \quad 600{,}5g)$

2- أعط تقدير بمجال لـ: μ بمستوى ثقة 95%؟ إشرح النتيجة؟

$[597{,}85 \quad ; \quad 603{,}14]$

3- أجريت دراسة على عينة جديدة مكونة من 100 علبة، فوجد أن متوسط وزن الصابون المسحوق للعلبة الواحدة يقدر بـ:

600 غرام وأن تباينها يقدر بـ: 7,84، ماهو مجال الثقة الجديد لـ: μ بمستوى الثقة 95%؟

$[598{,}46 \quad ; \quad 601{,}54]$

التمرين الثاني:

ينتج مصنع للمواد الغذائية قطع حلوى من نوع معين، متوسط أوزان كل القطع المنتجة هو 40 غرام وتباينها هو 4،

فإذا سحبنا من إنتاج هذا المصنع عينة عشوائية من 100 قطعة.

1- أحسب إحتمال أن يكون متوسط أوزان هذه القطع يتراوح ما بين 39,8 غرام و 40,3 غرام؟ 0,4649

2- أحسب قيمة الثابت k الذي يحقق: $P(m \leq k) = 0{,}975$؟ 40,784

3- إذا كان متوسط أوزان كل القطع مجهولا، وكان مجموع أوزان القطع المسحوبة في العينة هو 3950 غرام. فقدر بمجال القيمة الحقيقية لمتوسط كل القطع بمستوى ثقة 90%؟ [38,844 ; 40,156]

التمرين الثالث:

بإستخدام عينة حجمها 16، تم تقدير بمجال المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع، بمستوى ثقة 95%، فوجد أنه يتراوح ما بين 18,25 و 21,75، فإذا علمت أن هذا المجتمع يتوزع طبيعيا بتباين يساوي9.

1- ما هو المتوسط الحسابي للعينة المسحوبة؟ 20

2- ما هو خطأ المعاينة المرتكب في تقدير المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع؟ $\pm 1,47$

4- نريد تخفيض خطأ المعاينة إلى النصف، أي تحسين الدقة بـ 50%، ما هو حجم العينة اللازم لذلك؟ 64

التمرين الرابع:

مجتمعان يتوزعان توزيعا طبيعيا، الأول تباينه 49 والثاني تباينه 25، فإذا سحبنا منهما عينتين مستقلتين، الأولى من

المجتمع الأول وكان وسطها الحسابي 35، والثانية من المجتمع الثاني وكان وسطها الحسابي 33، فإذا كان حجم العينة الأولى 9، وحجم العينة الثانية 16، أوجد فترة الثقة بين متوسطي الطريقتين $(\mu_1 - \mu_2)$، وذلك باستخدام مستوى الثقة 99%؟

$[-4,83 \quad ; \quad 8,83]$

التمرين الخامس:

أستخدمت طريقتان لتدريس مادة الإحصاء لطلبة أحد الجامعات، ولدراسة الفرق بين هاتين الطريقتين أختيرت عينتان عشوائيتان مستقلتان، الأولى من طلبة الطريقة الأولى وكانت تحتوي على 10 طلبة، والثانية من طلبة الطريقة الثانية وكانت تحتوي على 12 طالبا، وأجري لهم إمتحان موحد. توضح البيانات التالية الوسط الحسابي والتباين لدرجات كل عينة:

$$m_1 = 77 \qquad m_2 = 82 \qquad S_1^2 = 5 \qquad S_2^2 = 6$$

إذا كان المجتمعان يتوزعان توزيعا طبيعيا، أوجد فترة الثقة للفرق بين متوسطي الطريقتين$(\mu_1 - \mu_2)$، وذلك باستخدام مستوى الثقة 95% في الحالتين:

أ- إذا كان: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ [2,89 ; 7,10] ب- إذا كان: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

[2,914 ; 7,086]

التمرين السادس:

عينة عشوائية تشمل 150 شخصا مختارة من مدينة كبيرة، وجد من بينهم 42 شخصا أميا. قَدِّرْ نسبة الأمية في هذه المدينة بإستخدام مستوى الثقة 95%؟

[0,21 ; 0,35]

التمرين السابع:

في إستفتاء خاص ببرنامج تلفزيوني للأطفال، أختيرت عينة عشوائية تشمل 125 طفلا، وعينة عشوائية مستقلة عنها تشمل 100 طفلة. فكان من المعجبين بالبرنامج من الأولاد 80 طفلا، وعدد المعجبين من البنات 75 طفلة. أوجد فترة ثقة 90% للفرق بين نسبة كل المعجبين من الأولاد ونسبة المعجبين من البنات؟ [−0,21 ; −0,01]

التمرين الثامن:

عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول، فإذا كان حجم العينة المسحوبة هو 13، وكان

$\sum_{i=1}^{13}(X_i - m)^2 = 128,41$. قَدِّرْ التباين والإنحراف المعياري للمجتمع باستخدام مستوى الثقة 95%؟

[5,50 ; 29,15] ، [2,34 ; 5,40]

التمرين التاسع:

مجتمعان، الأول توزيعه $N(\quad_1, \sigma_1)$، والثاني توزيعه $N(\mu_2, \sigma_2)$، سحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 5، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى حجمها 7، وحصلنا على البيانات التالية:

$m_1 = 525,3$ $m_2 = 510,8$ $S_1^2 = 2273$ $S_2^2 = 1759$

قَدِّرْ بمجال نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ باستخدام مستوى الثقة 95%؟ [0,21 ; 11,73]

بالتوفيق للجميع

جامعة محمد بوضياف – المسيلة كلية العلوم
الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير
السنة الثانية *LMD* علوم إقتصادية المقياس: الإحصاء
3

تمارين متنوعة (توزيع المعاينة) مع الحلول المختصرة

التمرين الأول:

1- أحسب الاحتمالات التالية علما أن $Z \to N(0,1)$:

$P(Z \geq 1{,}67)$ ، $P(Z \leq -1{,}23)$ ، $P(|Z| \leq 1{,}43)$ ، $P(|Z| \geq 2{,}67)$ ، $P(1{,}04 \leq Z \leq 1{,}67)$

0,0475 0,1093 0,8472 0,0076 0,1017

2- إذا كان $X \to N(20\ ,\ 5)$، حدد قيمة a في كل حالة من الحالات التالية:
$P(X \leq a) = 0{,}975$ ، $P(X \leq a) = 0{,}025$

29,8 10,2

3- إذا كان $X \to T(12)$ ، أوجد قيمة t فيمايلي، $P(T \geq t) = 0{,}01$ ، $P(T \leq t) = 0{,}05$

2,681 −1,782

4- إذا كان $X \to T(10)$ ، أحسب الاحتمالات: $P(T \geq 2{,}228)$ ، $P(T \leq 1{,}372)$ ، $P(T \geq -2{,}764)$

0,025 0,90 0,99

5- إذا كان $X \to \chi^2(20)$، أوجد قيمة K فيما يلي: $P(\chi^2 \geq K) = 0{,}01$ ، $P(\chi^2 \leq K) = 0{,}05$

37,566 10,851

6- إذا كان $X \to \chi^2(14)$ ، أحسب الاحتمالات: $P(\chi^2 \geq 7{,}790)$ ، $P(T \leq 5{,}629)$

0,90 0,025

7- إذا كان $X \to F(8\ ,12)$، أوجد قيمة K فيما يلي: $P(F \geq K) = 0{,}01$ ، $P(F \leq K) = 0{,}05$

4,5 0,244

8- إذا كان $X \to F(6\ ,9)$ ، أحسب الاحتمالات: $P(F \geq 5{,}8)$ ، $P(F \leq 2{,}55)$

0,01 0,90

التمرين الثاني:

1- تتبع أطوال كل الشباب في مدينة المسيلة توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 170 سم، وتباين 36، فإذا سحبنا منهم عينة عشوائية تشمل 25 شابا، فما احتمال أن يكون متوسط الطول في العينة يفوق 172سم؟ 0,0475

2- إذا كانت رواتب كل الموظفين التابعين لشركة كبيرة لها وسط حسابي يساوي 26953 دج، بإنحراف معياري 4573، فإذا سحبنا من هذه الشركة عينة عشوائية تشمل 49 موظفا، فما إحتمال أن يكون وسطها الحسابي أقل من 26000 دج؟ 0,0721

3- تتبع أوزان طلبة جامعة المسيلة توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 72 كلغ، فإذا سحبنا منهم عينة عشوائية ووجدنا أن إنحرافها المعياري يساوي 7 كلغ، فما احتمال أن يكون متوسط الوزن في العينة يفوق 70 كلغ في الحالتين التاليتين:

أ- حجم العينة يساوي 36. 0,9564 ب- حجم العينة يساوي 26. 0,90

التمرين الثالث:

1- عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع طبيعيا وسطه 28 إنحرافه 3، وعينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع آخر يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه 25 وإنحرافه 4، فإذا كان حجم كل عينة من العينتين يساوي 25، فأحسب الإحتمال التالي:

$P(m_1 - m_2 - 2 \geq 0)$ 0,8413

2- إذا كان لدينا مجتمعان لهما نفس الوسط الحسابي، وسحبنا من كل مجتمع عينة عشوائية تشمل 10 مفردات، فوجدنا أن تباين العينة الأولى يساوي 9، وتباين العينة الثانية يساوي 6، وكانت العينتان مستقلتين، فما إحتمال أن يكون الفرق بين متوسط العينة الأولى ومتوسط العينة الثانية أكبر من 2 في الحالتين التاليتين:

أ- تبايني المجتمعين متساويين. 0,10 ب- تبايني المجتمعين غير متساويين.

0,10

التمرين الرابع:

1- إذا كانت نسبة الأمية للأشخاص الذين أعمارهم فوق 25 سنة في مدينة ما هو 12,60%، وتم إختيار من هذه المدينة عينة عشوائية تشمل 50 شخصا من الأشخاص الذين أعمارهم فوق 25 سنة، فما إحتمال أن تكون نسبة الأمية في العينة أقل من 10%؟ 0,2912

2- إذا كانت نسبة التالف من إنتاج الآلة (أ) 7%، ونسبة التالف من إنتاج الآلة (ب) 5%، وسحبنا عينتين مستقلتين ، الأولى من إنتاج الآلة الأولى، وتحتوي على 36 وحدة، والثانية من إنتاج الآلة الثانية وتحتوي على 64 وحدة، فما إحتمال أن تكون نسبة التالف في عينة الآلة (أ) أكبر من نسبة التالف في عينة الآلة (ب) بمقدار 1,8% فأكثر؟ 0,5160

التمرين الخامس:

1- سحبت عينة عشوائية حجمها 12 من مجتمع يتوزع طبيعيا، انحرافه المعياري هو 5.

أوجد إحتمال أن يكون تباين العينة يقل عن9؟ 0,025

2- أخذت عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي 10 و12 من مجتمعين طبيعيين إنحرافهما على التوالي 2 و 4.

أوجد إحتمال أن يكون تباين العينة الأولى أكبر من نصف تباين العينة الثانية؟ 0,10

بالتوفيق للجميع