الأستاذ: هبال عبد النور - مكلف بأعمال موجهة

مقياس إدارة الإنتاج و العمليات سنة 3 إدارة أعمال

سلاسل تمارين مع الحلول

ت1:

مؤسسة لصناعة الأحذية ، و نظرا للطلب المتزايد على منتوجاتها قررت إنشاء مصنع بطاقة إنتاجية 300000 وحدة. توفرت للمؤسسة خمسة مواقع A ، B ، C ، D و E والبيانات التالية تتعلق بالتكاليف المتوقعة و أسعار البيع عند كل موقع:

الموقــع	التكلفة المتغيرة للوحدة(دج)	سعر البيــع (دج)
A	3	6
B	4	5.5
C	4.5	6.5
D	5	7
E	5.5	8

المطلوب : إذا علمت أن التكاليف الكلية التقديرية تمثل 75% من إجمالي الإيرادات لكل المواقع:

1- حدد الموقع البديل الأفضل لإنشاء المصنع .

2- مثل بيانيا الموقع المختـار

الحل:

نظرا لاختلاف التكاليف المتغيرة و أسعار البيع نطبق أسلوب الربحية؛ نحسب الربحية لكل موقع ثم نقوم بالمفاضلة:

A: الايراد: كمية × سعر

$= 300000 \times 6 = 1800000$

التكاليف الكلية: $1800000 \times 0.75 = 1350000$

الربح الصافي:

$1800000 - 1350000 = 450000$

B: $300000 \times 5.5 = 1650000$

التكاليف: $1650000 \times 0.75 = 1237500$

الربح: 412500

$1950000 = 6.5\times300000$:C

التكاليف: $1462500 = 0.75 \times 1950000$

الربح: 487500

$2100000 = 7\times300000$:D

التكاليف: $1575000 = 0.75 \times 2100000$

الربح: 525000

$2400000 = 8\times300000$:E

التكاليف: $1800000 = 0.75 \times 2400000$

الربح: 600000

نلاحظ أن الموقع E أفضل للمشروع

بالنسبة للتمثيل البياني نمثل التكاليف الكلية بخط متزايد و نمثل الايرادات و عند نقطة التقاطع تتحدد كمية التعادل التي انطلاقا منها تبدأ منطقة الربح.

ت2

شركة صناعية قررت إستحداث مصنع جديد لها ، بعد تزايد الطلب على منتوجاتها ، و قد توفرت لديها البيانات الآتية عن صلاحية ثلاثة مواقع هي أ ، ب و ج . و قد تم تقدير التكاليف المتغيرة و الثابتة لكل من هذه البدائل الثلاثة كما يوضح ذلك الجدول التالي :

الموقـع	التكاليف الثابتة السنوية	تكلفـة	الوحـدة الواحدة	بالدينـار
		المـواد	العـمل	تكاليف غير مباشرة
(أ)	20000	0.25	0.45	0.35
(ب)	18000	0.25	0.75	0.75
(ج)	17000	1.5	1	1

المطلـوب :

1- رسم خطوط التكاليف للمواقع الثلاث .

2- عند أي حجم من الإنتاج يمكن أن يتحقق الوضع التنافسي للموقع .

3- بإفتراض أن الطاقة النظرية هي 50000 وحدة و أن السعر موحد بالنسبة للمواقع الثلاث بالقيمة 5 دج ، فما هو الموقع الأفضل للشركة ؟

الحل:

نمثل الدوال الخطية للمواقع و هي كما يلي:

نجمع التكاليف المتغيرة لكل موقع:

أ: $0.35+0.45+0.25 = 1.05$

ب: $0.25 + 0.75 + 0.75 = 1.75$

ج: $1.5+1+1= 3.5$

دوال التكاليف تكون كما يلي:

أ: $Ct= 20000+1.05Q$

ب: $Ct= 18000+1.75Q$

ج: $Ct= 17000+3.5Q$

بتمثيل الدوال الثلاث نحدد نقاط التقاطع و التي يمكن حسابها جبريا عن طريق مساواة الدوال مثنى مثنى مثلا التقاطع بين دالتي (أ) و (ب) يتحدد كما يلي:

$$20000+1.05Q= 18000+1.75Q$$

$$20000-18000= 1.75Q-1.05Q$$

$$Q=2857.14$$

بالنسبة إلى يمين هذه النقطة نعوض في الدالتين باستخدام كمية أكبر (و لتكن 3000 مثلا):

$$20000+1.05(3000)=23150$$

$$18000+1.75(3000)= 23250$$

نلاحظ أنه على يمين هذه النقطة الموقع أ أفضل

معناه ب أفضل داخل المجال (من 0 إلى 2857.14) ثم تنتقل الأفضلية إلى أ

نحسب مرة أخرى تقاطع أ و ج :

$$20000+1.05Q= 17000+3.5Q$$

$$20000-17000= 3.5-1.05Q$$

$$1224.50$$

مرة أخرى نحدد مناطق أفضلية كل موقع عن طريق التعويض في دوال التكاليف الكلية، و في النهاية نحدد المجال الذي تنتمي إليه الكمية النظرية المخططة.

ت3 : حول نماذج النقل

لنفرض أن شركة لإنتاج البلاط لها ثلاث مصانع (F_3، F_2،F_1) وتقوم بنقل منتجها إلى أربعة مخازن تمثل نقاط توزيع مختلفة (S_4، S_3، S_2،S_1).

فإذا كانت طاقة المصانع هي على التوالي 85،40 ،60 وحدة أسبوعيا (علما أن وحدة القياس هي 1000م^2) واحتياج المخازن هو:70 ،25 ،50 ، 40 وكانت تكاليف النقل من كل مصنع إلى كل مخزن كما يلي:

المصبات (المخازن) / المصادر (المصانع)	S1	S2	S3	S4
F1	49	54	56	29
F2	60	32	36	33
F3	45	28	31	42

المطلوب: ما هي خطة التوزيع المثلى ؟

إن هدف الشركة هو تدنية تكاليف التوزيع والتي تظهر في الجدول السابق، فمثلا يكلف نقل وحدة واحدة من المصنع الأول (F1) إلى المخزن الأول (S1): 49 دينارا.

إذا فرضنا بأن الكميات المنقولة من كل مصدر إلى كل وجهة هي X_{ij}؛ تكون لدينا دالة الهدف:

$$Min(z)=49X_{11}+54X_{12}+56X_{13}+29X_{14}+60X_{21}+32X_{22}+36X_{23}+33X_{24}+45X_{31}+28X_{32}+31X_{33}+42X_{34}$$

حيث أن X_{11} هي الكمية المنقولة من المصدر الأول إلى المصب الأول، وبضربها في التكلفة الوحدوية للنقل (49) نحصل على تكاليف نقل المنتج من ذلك المصدر إلى ذلك المصب.

ولدينا نوعان أساسيان من القيود: مجموعة تتعلق باحترام طاقة كل مصنع، وأخرى تتعلق باحترام احتياجات كل مخزن؛ فأما القيود الثلاثة الأولى فهي على الشكل:

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} = 60$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} =40$$

$$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34} = 85$$

وأما المجموعة الثانية فهي:

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}= 40$$

$$X_{12}+X_{22}+X_{32}= 50$$

$$X_{13}+X_{23}+X_{33}= 25$$

$$X_{14}+X_{24}+X_{34} = 70$$

$$j = 1\ldots4،\ i = 1\ldots3،\ X_{ij} \geq 0$$

وهي مسألة برمجة خطية ذات قيود على شكل معادلات؛ يمكن حلها بإضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود للحصول على الصيغة القياسية، غير أن "نموذج النقل" يسمح بحل المسألة بأسلوب بسيط دون اللجوء إلى أسلوب السمبلكس:

- نسعى أولا إلى تشكيل حل أساسي أولي Initial feasible solution؛ ويتم ذلك بعدة طرق:

  * طريقة الركن الشمالي الغربي North West Corner Method

  * طريقة أدنى تكلفة Least Cost Method

  * طريقة فوجل Vogel's Method

وسنختار هنا الطريق الثانية 'أدنى تكلفة' للحصول على الجدول المبدئي؛ و "اعتماد هذه الطريقة يتطلب الأخذ بمبدأ أقل كلفة بالخلية و هذا يعني تعبئة الخلية التي تتضمن أصغر كلفة نقل قياسا إلى تكاليف النقل بالخلايا الأخرى في الجدول"؛ و عليه نحصل على الجدول التالي:

المخازن / المصانع	S1	S2	S3	S4	إجمالي الإنتاج
F1	$\boxed{49}$	$\boxed{54}$	$\boxed{56}$	$\boxed{29}$ 60	60
F2	$\boxed{60}$ 30	$\boxed{32}$	$\boxed{36}$	$\boxed{33}$ 10	40
F3	$\boxed{45}$ 10	$\boxed{28}$ 50	$\boxed{31}$ 25	$\boxed{42}$	85
إجمالي الطلب	40	50	25	70	185 / 185

لقد قمنا في الجدول المبدئي السابق بتوزيع الكميات المتوفرة والتي تظهر في العمود الأخير لإشباع الكميات المطلوبة والتي تظهر في السطر الأخير منطلقين من أدنى تكلفة (28) أي الخانة (F_3،S_2) أين تم إشباع طلب هذا المخزن وهو (50) وحدة وبقي لدى المصنع طاقة توريد قدرها (85−50=35) يستطيع أن يمون بها مخزنا آخر، ثم الخانة التي تليها (F_1،S_4) وهكذا؛ مع السعي إلى إشباع الطلب دون تجاهل الكمية المتاحة (الموازنة بين احتياج العمود والكمية المتوفرة في السطر).

أما إجمالي تكاليف التوزيع وفق الخطة المبدئية فهو:

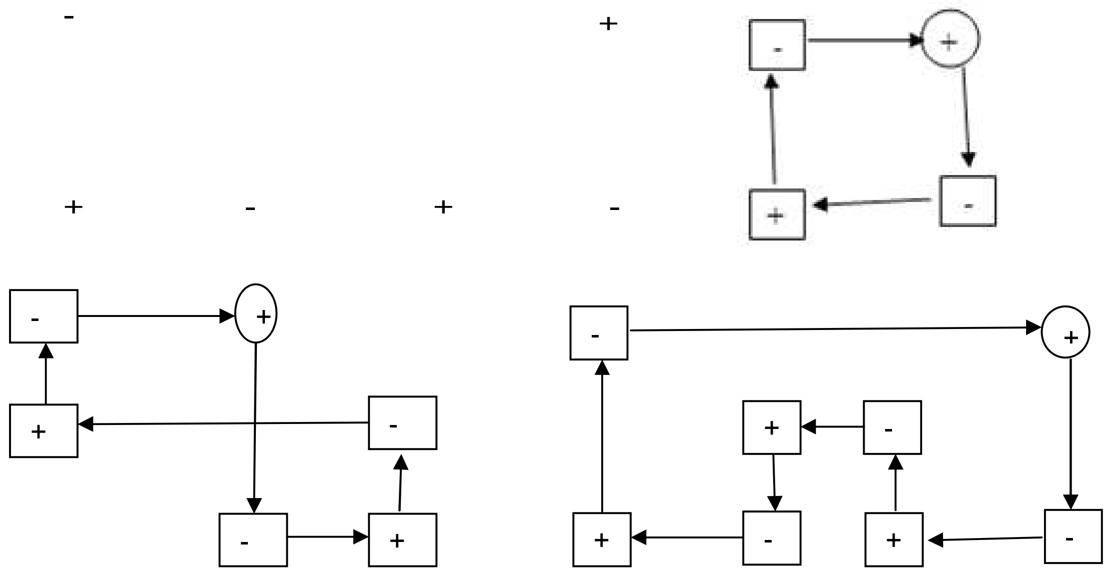
$$(31x25)+ (28x50) + (45x10) + (33x10) + (60x30) + (29x60) =6495$$

- يأتي بعد ذلك مرحلة محاولة تحسين الحل Improving the solution ومن ثم اختبار الأمثلية Optimality Test؛ وهكذا حتى الوصول إلى الحل الأمثل .

ولدى محاولة تحسين الحل يطرح تساؤل مفاده :هل يمكن إستغلال الخلايا الفارغة في جدول الحل المبدئي بحيث يؤدي ذلك إلى تخفيض التكاليف الإجمالية للتوزيع؟

من أجل تقييم الخلايا الفارغة نتبع ما يعرف بـ" طريقة القفز على الصخور Stepping stone Method " والتي تقوم على إعارة وحدة واحدة من خلية مشغولة إلى خلية فارغة وملاحظة أثر ذلك على إجمالي التكاليف؛

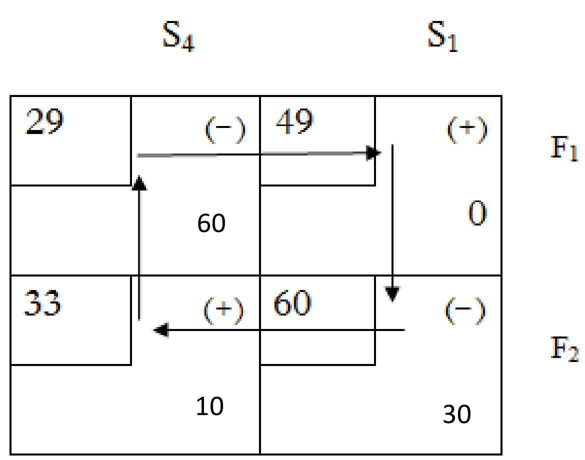
و ينشأ نتيجة لتطبيق هذه الطريقة ما يعرف بـ "المسار"؛ و يتألف مسار كل خلية من عدة خلايا كلها مملوءة باستثناء الخلية الخاضعة للتقييم، و يتخذ المسار عدة أشكال أبرزها:



ترمز الدائرة في الأشكال أعلاه للخلية المراد تقييمها وتكون خلية فارغة و تحمل دوما إشارة موجبة؛ أما بقية المربعات فتشير إلى بقية الخلايا التي تشكل المسار و تكون كلها من الخلايا المملوءة و تتناوب بين السالب

و الموجب بحيث كل إشارة سالبة تلغيها أخرى موجبة و كل إشارة موجبة تلغيها أخرى سالبة ليبقى في النهاية التوازن قائما داخل كل سطر و كل عمود، و لتوضيح ما سبق نبدأ بتقييم الخلايا الفارغة في مثالنا:

- تقييم الخلية الفارغة (F1,S1):



أركان المراد

لنلاحظ أن الأسهم تشكل ما يعرف ب "مسار" الخلية المعنية بالتقييم؛ و لنلاحظ أن المسار هي دوما خلايا مملوءة باستثناء الخلية تقييمها.

إذا نقلنا وحدة إلى $(S_1،F_1)$ ننقص وحدة من الخلية $(F_2،S_1)$ لنحافظ على توازن العمود(مجموع طلب S_1 ينبغي ألا يفوق 40).

وبطرح وحدة من $(F_2،S_1)$ يختل السطر F_2؛ لذلك نضيف وحدة إلى الخلية $(F_2،S_4)$ وهو ما يؤدي إلى اختلال العمود S_4؛ نطرح إذن وحدة من الخلية S_4،(F_1) وهكذا ينشأ المسار السابق.

أما التأثير على التكلفة فيحسب كما يلي:

$-7 = 49-60+33-29$ وهذا يعني أن نقل وحدة واحدة إلى هذه الخلية يترتب عليه تخفيض التكاليف بـ 07دنانير.

- تقييم الخلية الفارغة $(F2،S_2)$:

S_2		S_1		
32	(+) 0	60	(−) 30	F2
28	(−) 50	45	(+) 10	F3

$+32-28+45-60 = -11$

أي أن تخصيص وحدة واحدة في هذه الخلية يخفض التكاليف بـ11دينار.

- تقييم الخلية الفارغة $(F2،S_3)$:

S_3		S_1		
36	(+) 0	60	(−) 30	F2
31	(−) 25	45	(+) 10	F3

$10- = 60-45+31-36+$

أي أن تخصيص وحدة واحدة إلى هذه الخلية يخفض التكاليف بـ10دينار.

- تقييم الخلية (F_3،S_4):

S4	S1	
33 (−) 10	60 (+) 30	F2
42 (+) 0	45 (−) 10	F3

نلاحظ أن تخصيص وحدة واحدة لهذه الخلية ينجر عنه ارتفاع تكاليف التوزيع بـ (+42-45+60-33 = +24) دينار.

- تقييم الخلية F_1،S_2: مسار هذه الخلية هو كما يلي:

S4	S3	S2	S1	
29 (−) 60		54 (+) 0		F1
33 (+) 10			60 (−) 30	F2
		28 (−) 50	45 (+) 10	F3

54-29+33-60+45-28 =+15

- تقييم الخلية $(F_1،S_3)$:

$56-29+33-60+45-31=+14$

S4	S3	S2	S1	
29 (-) 60	56 (+) 0			F1
33 (+) 10			60 (-) 30	F2
	31 (-) 25		45 (+) 10	F3

إتضح لنا من عملية تقييم الخلايا الصفرية أن الخلية $(F_2،S_2)$ تحقق أكبر تخفيض للتكاليف (أكبر قيمة ضمن القيم السالبة بالقيمة المطلقة)، لذا ينبغي استغلالها؛ لكن يثار سؤال: ما عدد الوحدات التي ينبغي نقلها لهذه الخانة؟

للإجابة؛ نرجع إلى مسار الخلية، ونبحث تحديدا عن الخلايا ذات الإشارة السالبة:

الخلايا ذات الإشارة السالبة هي: $(F_2،S_1)$ و $(F_3،S_2)$ الكميات الموجودة بها هي على التوالي: 30، 50 وحدة.

يتم اختيار الخلية ذات الكمية الأقل؛ أي$(F_2،S_1)$، ننقل محتواها (30 وحدة) إلى الخلية $(F_2،S_2)$ ونطرح نفس الكمية من$(F_3، S_2)$ ؛ ونضيفها إلى $(F_3،S_1)$ للحفاظ على التوازن، فيصبح المسار:

S_2		S_1		
32	30	60	0	F2
28	20	45	40	F3

أي نحرك تلك الكمية على مسار الخلية حيثما وجد الموجب نضيفها و حيثما وجد السالب نطرحها.

وهكذا يصبح جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

المخازن / المصانع	S1	S2	S3	S4	إجمالي الإنتاج
F1	49	54	56	29 / 60	60
F2	60 / 0	32 / 30	36	33 / 10	40
F3	45 / 40	28 / 20	31 / 25	42 / 0	85
إجمالي الطلب	40	50	25	70	185 / 185

وتكلفة هذه الخطة هي:

$(60x29)+(30x32)+(10x33)+(40x45)+(20x28)+(25x31) = 6165$

أي انخفضت تكاليف النقل بـ: $6495-6165 = 330$ دينارا.

في الجدول الجديد؛ نقوم مجددا بتقييم الخلايا الصفرية:

- S_1،(F_1):

	S1	S2	S3	S4
F1	49 (+)			29 (−) 60
F2		32 (−) 30		33 (+) 10
F3	45 (−)	28 (+)	31	

			20	40	

= 29−33+32−28+45−49+

4+

:(F_1،S_2) -

$+54-32+33-29 = +26$

	S4	S2
F1	29 (−) 60	54 (+) 0
F2	33 (+) 10	32 (−) 30

:(F_1،S_3) -

$+56-31+28-32+33-29 = +25$

	S4	S3	S2
F1	29 (−) 60	56 (+) 0	
F2	33 (+) 10		32 (−) 30
F3		31 (−) 25	28 (+) 20

:(F_2،S_3) -

S3 S2

F2	36 (+) 0	32 (−) 30	+36−31+28−32= +1
F3	31 (−) 25	28 (+) 20	

- (F_3،S_4):

	S2	S4	
F2	33 (−) 10	32 (+) 30	42−28+32−33 = +13
F3	42 (+) 0	28 (−) 20	

ومن عملية التقييم نلاحظ أنه لم تبق هناك فر□لة لتحسين الحل؛ أي تخفيض التكاليف أكثر (لأن جميع مؤشرات التحسن σ_{ij} موجبة) حيث يعبر ذلك الرمز عن قيمة مؤشر التحسن للخلية الناجمة عن تقاطع السطر (i) مع العمود (j)، أما شرط الأمثلية فهو وتنص على: ($\forall i, \forall j : \sigma_{ij} \geq 0$) وعليه فالجدول السابق هو خطة التوزيع المثلى

- يحصل المخزن الرابع على كامل إنتاج المصنع الأول (60 وحدة)؛ وبما أنه يحتاج إلى (70) وحدة يكمل الباقي (10 وحدات) من عند المصنع الثاني.

- يحصل المخزن الثالث على كامل احتياجاته (25 وحدة) من المصنع الثالث؛ الذي يبقى لديه فائض (85−25=60) يوجهه إلى المخازن الأخرى.

- يحصل المخزن الثاني على كامل فائض المصنع الثاني بعد تزويده للمخزن الرابع بـ(10) وحدات (40-10 =30)؛ ولإكمال حاجته يأخذ (20) وحدة من المصنع الثالث الذي كان قد بقي لديه كما قلنا (60) وحدة؛ وبالتالي يبقى لديه بعد ذلك (40)وحدة (40 = 20-60).

- توجه الـ (40) وحدة تلك إلى المخزن الأول ؛ وهي مساوية تماما لاحتياجه.

أما إجمالي تكاليف التوزيع حسب هذه الخطة فهو:6165 دينارا.

بعد العرض السابق يجدر أن نسجل الملاحظات التالية:

أ- على غير ما يمكن أن تدل عليه التسمية من حصر نموذج النقل في مسائل النقل؛ فـ"إن نموذج النقل يمكن أيضا أن يستعمل في حل المشاكل المتعلقة بمجالات تخطيط الإنتاج؛ تخصيص الآلات وتحديد المواقع الإنتاجية

ب-يفترض نموذج النقل:

- تساوي العرض مع الطلب.

- أن تتحقق في جدول الحل المبدئي أو أي جدول عبر سيرورة الحل، المعادلة:

عدد المصادر (المصانع) + عدد المصبات(المخازن) -1= عدد الخلايا المشغولة.

ت4: حول أسلوب سمبلكس (حالة التعظيم)

لتكن لدينا مشكلة المدخلات و المخرجات التالية:

المخرجات / المدخلات	مائدة كبيرة	مائدة □غيرة	كرسي كبير	كرسي □غير	الحد الأقصى الأسبوعي المتاح
الخشب (م^2)	2	1	3	2	400 م^2
القصبات الحديدية(م)	2	2	1	3	140 م
معالجة على الآلة الأولى (دقيقة)	15	10	12	15	2400 دقيقة
معالجة على الآلة الثانية (دقيقة)	5	7	15	10	2400 دقيقة
الربح الوحدوي دج	230	180	190	220	

المطلوب: ما هي التشكيلة المثلى التي تعظم الربح ؟

سنحاول حل المسألة موضحين منهجية أسلوب " السمبلكس ":

لنفرض أن x_1: هي الكمية المنتجة من الموائد الكبيرة، x_2: الكمية المنتجة من الموائد الصغيرة، x_3: الكمية المنتجة من الكراسي الكبيرة، x_4: الكمية المنتجة من الكراسي الصغيرة، وهي المتغيرات التي نبحث عن قيمها.

- نشكل أولا البرنامج الخطي المعبر عن المشكلة :

$$Max : (z) = 230x_1 + 180x_2 + 190x_3 + 220x_4$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 140 \\ 15x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 15x_4 \leq 2400 \\ 5x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 10x_4 \leq 2400 \\ X_i \geq 0, \ i = 1..4 \end{cases}$$

- نحول المسألة إلى الصيغة القياسية Standard form، وذلك بتحويل المتراجحات إلى معادلات عن طريق إضافة متغيرات الفجوة Slack Variables:

$$Max:(z) = 230x_1 + 180x_2 + 190x_3 + 220x_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$$

$$z - 230x_1 - 180x_2 - 190x_3 - 220x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + S_1 = 400$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + S_2 = 140$$

$$15x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 15x_4 + S_3 = 2400$$

$$5x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 10x_4 + S_4 = 2400$$

نلاحظ أن متغيرات الفجوة (S_j) أضيفت إلى القيود من أجل ردم الفجوة بين طرفي المتراجحة؛ و لأن كل متغير يظهر في قيد أو مجموعة قيود يجب أن يظهر في دالة الهدف فقد تم إدخالها في دالة الهدف و لكن بمعاملات صفرية لأن هذه المتغيرات تعبر اقتصاديا عن الموارد المتاحة و لا يتأتى الربح في هذه الحالة ببيع الموارد و لكن ببيع المنتجات.

- نشكل الآن جدول السمبلكس الأول :

متغيرات خارج الأساس (معدومة)

T_1	X_1	X_2	X_3	X_4	B
S_1	2	1	3	2	400
S_2	2	2	1	3	140
S_3	15	10	12	15	2400
S_4	5	7	15	10	2400
Z	-230	-180	-190	-220	0

متغيرات الأساس

عمود الثوابت

معاملات دالة الهدف

قيمة دالة الهدف

يسمى هذا الجدول " جدول الحل الأساسي الأول " ؛ وتكون فيه 'متغيرات الفجوة' هي المتغيرات الأساسية تقرأ قيمها في عمود الثوابت، بينما تكون المتغيرات القرارية خارج الأساس أي معدومة أما معاملاتها فتقرأ في السطر الأسفل المقابل ، وبذلك يعبر هذا الجدول عن حالة اللاإنتاج التي تكون فيها كل الإمكانيات المتاحة طاقات عاطلة (عمود الثوابت) ما يعني أن قيمة دالة الهدف معدومة. نشير إلى أنه لكي يكون المتغير أساسيا ومن ثم مؤهلا لاحتلال الأساس في جدول الحل المبدئي؛ ينبغي أن يتوفر فيه شرطان: أن يظهر في قيد واحد فقط، و أن يكون معامله (1+).

تسعى خوارزمية السمبلكس إلى تحسين الحل الأساسي الأول عبر اختبار مجموعة من الحلول الأساسية إلى أن لا يبقى مجال للتحسين وذلك عند بلوغ الحل الأمثل.

" إنطلاقا من الجدول الأول نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني وذلك باختيار المتغيرة التي تدخل الأساس و المتغيرة التي تخرج منه وكذلك 'عنصر الارتكاز' المعرف لاحقا وذلك كما يلي:

*بما إننا نسعى إلى تعظيم دالة الهدف ؛ فالمتغيرة التي تدخل الأساس هي ذات أعلى معامل في الدالة، لذلك نختار من سطر دالة الهدف أكبر قيمة (بالقيمة المطلقة) والعمود الذي تنتمي إليه يسمى "عمود الارتكاز"؛

*المتغيرة التي تخرج من الأساس هي المقابلة لأصغر قيمة موجبة ناتجة عن قسمة عمود الثوابت على عمود الارتكاز ، ويسمى سطرها " سطر الارتكاز"؛

*عنصر تقاطع عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز يسمى "عنصر الارتكاز" أو "البؤرة Pivot".

وبعد تبادل المواقع بين المتغيرة الداخلة إلى الأساس والخارجة منه نجري مجموعة من التحويلات قبل التطرق إليها نعود إلى الجدول الأول لنوضح كيفية تحديد المتغيرة الداخلة والخارجة وعنصر الارتكاز:

T_1	X_1	X_2	X_3	X_4	B	
S_1	2	1	3	2	400	400/2 = 200
S_2	2	2	1	3	140	140/2 = 70
S_3	15	10	12	15	2400	2400/15= 160
S_4	5	7	15	10	2400	2400/5 = 480
Z	-230	-180	-190	-220	0	

في هذا الجدول: إخترنا أعلى قيمة (بالقيمة المطلقة) في سطر معاملات دالة الهدف (230) فكان ذلك "عمود الارتكاز"، ثم قسمنا عليه عمود الثوابت وأخذنا أصغر قيمة موجبة (70) فكان ذلك" سطر الارتكاز" ،ونتج عن تقاطعهما العنصر (2) وهو "عنصر الارتكاز"؛ هذا يعني أن خوارزمية السمبلكس ستحل المتغيرة x_1 محل المتغيرة S_2 ،ويتبع ذلك تحويلات كما يلي :

- في الجدول الجديد يحل "مقلوب عنصر الارتكاز" محل ''عنصر الارتكاز"
- يقسم باقي عناصر سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز
- باقي عناصر عمود الارتكاز يحل محلها نفس العناصر مقسومة على "سالب عنصر الارتكاز"

– تحول بقية قيم الجدول وفق طرق أبرزها " قاعدة المستطيلات" وهي كما يلي:

1/a			b/a	
c/–a			$d' = d - \frac{c \times b}{a}$	

	a			b
	c			d

بعد تلك التحويلات نفحص من جديد معاملات سطر دالة الهدف ونعيد الكرة كما في السابق، إلى أن تصبح قيم السطر الأخير موجبة أو معدومة ؛ وهو ما يعني أننا و□لنا إلى جدول الحل الأمثل وفي مثالنا يكون الجدول الثاني كما يلي:

T_2	S_2	X_2	X_3	X_4	B	
S_1	–1	–1	2	–1	260	260/2=130 ←
X_1	0.5	1	0.5	1.5	70	70/0.5=140
S_3	–7.5	–5	4.5	- 7.5	1350	1350/4.5=300
S_4	–2.5	2	12.5	2.5	2050	2050/12.5=164
Z	115	50	–75 ↑	125	16100	

في هذا الجدول تم حساب العنصر a_{32} (العنصر الواقع في السطر الثالث و العمود الثاني) مثلا كما يلي: $a_{32}=-10-(15*2/2) = -5$ ؛

وكذا بقيمة العنا□ر باستثناء عنا□ر سطر الارتكاز التي قُسمت على عنصر الإرتكاز، و عمود الإرتكاز الذي قُسمت عنا□ره على سالب عنصر الإرتكاز، وتم في هذا الجدول إدخال x_1 إلى برنامج الإنتاج بحجم يقرأ في العمود الأخير (70) وحدة منتجة فقفزت قيمة دالة الهدف من الصفر إلى 16100 و.ن يحصل عليها إما بطريقة المستطيلات السابق شرحها أو بالتعويض مباشرة في دالة الهدف (16100=230*70).

لازلنا نلاحظ هنا وجود معاملات سالبة في سطر دالة الهدف؛ وهذا يعني أن إمكانية تحسينها لا تزال قائمة؛ نعيد إذن إجراء الخطوات السابقة، وسنسعى الآن إلى إيجاد الجدول الثالث باختيار أكبر قيمة ضمن القيم السالبة من سطر دالة الهدف (بالقيمة المطلقة) و في الجدول أعلاه توضيح لعملية اختيار عمود الارتكاز و سطر الارتكاز و البؤرة؛ نلاحظ أن المتغير المرشح لدخول الأساس في هذه المرحلة هو (x_3):

T_3	S_2	X_2	S_1	X_4	B
X_3	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	130
X_1	0.75	1.25	-0.25	1.75	5
S_3	-5.25	-2.75	-2.25	-5.25	765
S_4	3.75	8.25	-6.25	8.75	425
Z	77.5	12.5	37.5	87.5	25850

في هذا الطور من الحل أدخلت الخوارزمية إلى البرنامج الإنتاجي x_3 بكمية قدرها 130 فارتفعت قيمة دالة الهدف إلى (25850 و ن)؛ كما نلاحظ أن كافة معاملات دالة الهدف صارت أكبر من أو تساوي الصفر وهو ما يعني أننا أمام الحل الأمثل؛ إذن البرنامج الإنتاجي الأمثل للمصنع هو أن يتم إنتاج:

(05) "موائد كبيرة" و(130) "كرسيا كبيرا" أسبوعيا؛ ويتخلى عن إنتاج "الموائد الصغيرة" و "الكراسي الصغيرة"، أما أقصى ربح يمكن الوصول إليه في ظل الإمكانات المتاحة فهو: (25850 ون).

وعن تأثير هذا البرنامج على الإمكانات الإنتاجية للمصنع نعوض بالكميات السابقة في قيود المسألة فنجد ما يلي:

$$2(5)+0+3(130)+2(0) = 400$$
$$2(5)+2(0)+1(130)+3(0) = 140$$
$$15(5)+10(0)+12(130)+15(0) = 1635$$
$$5(5)+7(0)+15(130)+10(0) = 1975$$

هذا يعني أن الكمية المتاحة من الخشب أُستخدمت بالكامل (400م^2) وكذلك بالنسبة للكمية المتاحة من القصبات المعدنية (140م)، أما الآلة الأولى فيستهلك من طاقتها (1635 دقيقة) و تبقى لديها طاقة عاطلة قدرها (2400-1635=765 دقيقة)، و أما الآلة الثانية فيستهلك من طاقتها (1975 دقيقة) و تبقى لديها طاقة عاطلة قدرها (2400- 1975 = 425 دقيقة)، كما يمكن قراءة هذه النتائج مباشرة من جدول الحل الأمثل كما يلي :

- وجود كل من (X_2) و (X_4) خارج الأساس يعني أن الكميتين معدومتان؛ أي التخلي عن إنتاج الموائد الصغيرة و الكراسي الصغيرة؛
- وجود كل من (S_1) و (S_2) خارج الأساس (أي يساويان الصفر) يعني أن المورد الأول و الثاني لهذا المصنع تم استخدامهما بالكامل؛ لأن هذه المتغيرات (Sj) تعبر عن "الطاقة العاطلة".

- تقرأ قيم متغيرات الأساس (X_3،X_1،S_3،S_4) مباشرة في العمود الأخير (B) و تضم متغيرين قراريين يعبران عن الكميات التي ينبغي إنتاجها من المنتجين المذكورين؛ ومتغيرين يعبران عن الطاقة العاطلة في المورد الثالث (الآلة الأولى) والمورد الرابع (الآلة الثانية) على التوالي.

ت5: أسلوب سمبلكس (حالة التدنية)

$$
\begin{aligned}
&Min:(w) = 2x_1 + 5x_2 \\
&x_1 + 3x_2 \geq 12 \\
&2x_1 + 4x_2 \geq 10 \\
&x_1 + x_2 \geq 08 \\
&(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)
\end{aligned}
$$

الحل:

نلاحظ أن المسألة تتكون من متغيرين؛ وبذلك يمكن حلها بالطريقة البيانية غير أننا سنختار حلها بأسلوب "السمبلكس":

نحول المسألة إذن من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية؛ ونبدأ من القيود التي تصبح كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 - S_1 + a_1 = 12 \\
&2x_1 + 4x_2 - S_2 + a_2 = 10 \\
&x_1 + x_2 - S_3 + a_3 = 8 \\
&x_i \geq 0,\ a_i \geq 0
\end{aligned}
$$

في هذه المرحلة قمنا بطرح متغيرات الفجوة Sj من القيود لتحويلها إلى معادلات ولما كانت غير صالحة لأن تكون متغيرات أساسية لكون معاملها (1-) أضفنا ما يعرف بالمتغيرات الوهمية.

إن المتغيرات الوهمية (Aj) ليس لها معنى إقتصادي؛ لكن يستعان بها لتلعب دور المتغيرات الأساسية إن فقدت، ووجود أحدها في الأساس يعني أننا خارج منطقة الحلول الممكنة.

نجري تحويلا على الدالة الاقتصادية كما يلي :

$$Min:(w) = 2x_1 + 5x_2 + 0S_1 + Ma_1 + 0S_2 + Ma_2 + 0S_3 + Ma_3$$

نلاحظ أن المتغيرات الا□طناعية(a_1, a_2, a_3) قد أخذت المعامل(M)، والذي يفترض فيه أن يأخذ قيمة كبيرة جدا بإشارة موجبة، والغرض هنا هو عدم السماح للمتغيرات الا□طناعية – والتي هي مجرد متغيرات مساعدة – بالظهور في جدول الحل النهائي لأنها ستكون أول مرشح للخروج من الأساس بحكم ضخامة معاملها الذي يتناقض مع طبيعة الهدف (تدنية).

نوجد كالعادة جدول السمبلكس المبدئي:

		(2)	(5)	(0)	(0)	(0)		
	T_0	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B	
(M)	a_1	1	3	-1	0	0	12	12/1=12
(M)	a_2	2	4	0	-1	0	10	10/2=5 ←
(M)	a_3	1	1	0	0	-1	8	8/1=8
	w^a	4m-2 ↑	8m-5	-M	-M	-M		

نلاحظ أننا أضفنا إلى رمز الدالة (w) حرفا هو (a) ليشير إلى أننا حولنا دالة الهدف إلى 'دالة هدف وهمية' لأن وجود المتغيرات الوهمية في الأساس يجعل من قيمة هذه الدالة غير ذات دلالة عملية لذلك استغنينا عن حساب قيمتها في هذه المرحلة.

أما معاملات سطر دالة الهدف فتم حسابها كما يلي:

$$C_j^a = (\sum C_i'.\alpha_{ij}) - C_j$$

حيث:

C_j^a : هو المعامل الواقع في العمود (j) من سطر الدالة الوهمية؛

C_i' : هو معامل المتغير الأساسي الواقع في السطر (i) معامله في دالة الهدف؛ نلاحظ في الجدول أعلاه أننا وضعنا بجانب كل متغير يظهر في الأساس معامله في دالة الهدف؛

α_{ij} : العنصر الواقع في السطر(i) و العمود (j) من مصفوفة المعاملات؛

C_j : معامل المتغير الواقع في العمود (j) في دالة الهدف؛ و في الجدول أعلاه وضعنا بجوار كل متغير معامله في دالة الهدف.

مثلا تم حساب المعامل الأول من سطر دالة الهدف الوهمية (المقابل للمتغير X_1) كما يلي:

$$1.M + 2.M + 1M - 2 = 4M - 2$$

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف لم يتم احتسابها في هذه المرحلة لأنها غير عملية بسبب وجود المتغيرات الوهمية في الأساس.

و كما فعلنا في حالة التعظيم نبدأ بتحديد المتغير الذي سيدخل الأساس فيتحدد عمود الإرتكاز؛ و لهذا الغرض ننظر ضمن القيم الموجبة و نختار أصغر قيمة منها؛ و في مثالنا القيم الموجبة في سطر الدالة هي:

[(4m-2)، (8m-5)] و بما أن المقدار (M) يفترض أنه كبير جدا فإنه يلغي القيم التي بجواره، نلاحظ أن أصغر قيمة ضمنها هي: (4m-2) و على أساسها حددنا عمود الإرتكاز و هو ما يعني أن المتغير الذي سيدخل الأساس هو (X_1)، و بعد قسمة عناصر عمود الثوابت على عناصر عمود الإرتكاز و أخذ أصغر قيمة موجبة تحدد سطر الإرتكاز و هو ما يعني أن المتغير الوهمي (a_2) سيغادر الأساس، و سنقوم بعد ذلك بالتحويلات نفسها السابق شرحها في حالة التعظيم، و نستمر في تحسين الحل حتى تصبح كل عناصر سطر دالة الهدف أصغر من أو تساوي الصفر و نتخلص من كل المتغيرات الوهمية التي في الأساس، و عليه يكون الجدول الموالي كما يلي:

$_1T$	a_2	X_2	S_1	S_2	S_3	B	
a_1	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	7	7÷1/2=14
X_1	$\frac{1}{2}$	2	0	$-\frac{1}{2}$	0	5	نتجنب القسمة على السالب
a_3	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	-1	3	3÷1/2=6 ←
w^a	-2m+1	-1	-m	m-1 ↑	-m		

لا يمكن إعطاء تفسير عملي للحل الوارد في هذا الجدول نظرا لبقاء متغير وهمي أو أكثر في الأساس؛ غير أنه مادامت عناصر السطر الأخير لم تعد جميعا سالبة أو معدومة فذلك يعني أننا ما زلنا لم نصل إلى الحل الأمثل؛ مرة أخرى ننظر ضمن القيم الموجبة في سطر دالة الهدف لنختار أصغرها (لدينا هنا: "m-1" فقط) إذن سيكون عمودها هو عمود الإرتكاز و هو ما يعني أن (S_2) هو الذي سيدخل الأساس في الطور القادم من سيرورة الحل؛ نلاحظ أننا أهملنا قسمة العنصر الثاني من عمود الثوابت على نظيره من عمود الارتكاز لكون الأخير سالبا و هو ما لا يسمح له بأن

يكون عنصر ارتكاز، كما نلاحظ أن المتغير المرشح للخروج من الأساس هو (a_3)؛ و بتطبيق القواعد السابق شرحها نحصل على بقية أطوار الحل كما يلي:

$_2T$	a_2	X_2	S_1	a_3	S_3	B	
a_1	1	2	–1	1	1	4	4/1=4
X_1	0	1	0	1	–1	8	نهمل القسمة على السالب
S_2	–1	–2	0	2	–2	6	نهمل القسمة على السالب
w^a	–m+1	2m–3	–m	–2m+2	m–2		

$_3T$	a_2	X_2	S_1	a_3	a_1	B	
S_3	1	2	–1	1	1	4	4/2=2 ←
X_1	1	3	2	2	1	12	12/3=4
S_2	1	2	–2	4	2	14	14/2=7
w^a	–2m+3	+1	–2	–3m+4	–m+2		

لنلاحظ أننا في هذا الطور (T_3)تخلصنا من كل المتغيرات الوهمية التي كانت في الأساس؛ و هو ما يعني أن هذا الجدول يعبر عن حل عملي (يمكن إعطاؤه قراءة عملية)؛ و هو ينص على ($x_1=12, x_2=0$)، أما المتغيرات (S_2, S_3) فهي تعبر عن الفائض في القيدين الثاني و الثالث و يمكن التعويض بقيم ($x_1=12, x_2=0$) في القيود للتحقق من الأمر:

$$\begin{aligned} &Min:(w)=2x_1+5x_2 \\ &x_1+3x_2 \geq 12 \\ &2x_1+4x_2 \geq 10 \\ &x_1+x_2 \geq 08 \\ &(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} &1(12)+3(0)=12 \\ &2(12)+4(0)=24 \\ &1(12)+0=12 \end{aligned}$$

نلاحظ وجود فائض قدره (04) في القيد الثالث، و فائض (14) في القيد الثاني.

لا يزال لدينا معامل موجب في سطر دالة الهدف (+1) إذن نكمل الحل:

$_4T$	a_2	S_3	S_1	a_3	a_1	B
X_2	½	1/2	–1/2	1/2	1/2	2

X_1	-1/2	-3/2	7/2	1/2	-1/2	6
S_2	0	-1	-1	3	1	10
	-2m+5/2	-1/2	-3/2	-3m+7/2	-m+3/2	

في هذا الطور صارت جميع معاملات السطر الأخير تحقق شرط الأمثلية (سالبة أو معدومة) و هو ما يعني أن هذا هو الحل الأمثل؛ نقرأ قيم متغيرات الأساس في العمود (B):

$$x_1 = 6$$
$$x_2 = 2$$

نلاحظ وجود فائض في القيد الثاني قدره $(S_2 = 10)$؛ و هي النتائج ذاتها التي حصلنا عليها بالطريقة البيانية.