السداسي 02: ماستر إدارة الإنتاج والتموين

مقياس: تحليل السلاسل الزمنية

السلسلة رقم 04

المسألة 01: أجب على الأسئلة التالية:

1- ما أهمية دالة الارتباط الذاتي الجزئي *PACF* في تحليل السلاسل الزمنية؟

2- أذكر أهم خصائص دالة الارتباط الذاتي الجزئي.

3- أثبت صحة الآتي:

$$\phi_{11} = \rho(1)$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho(2)-\rho(1)^2}{1-\rho(1)^2}$$

المسألة 02: قدمت مؤسسة ما البيانات المبينة في الجدول التالي والمتعلقة بالمبيعات الشهرية المحققة خلال سنة 2019:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	2
المبيعات (وحدة)	4000	4250	4050	4500	4550	4400	4650	4730	4770	5020	5080	5200

1- أحسب معاملات الارتباط الذاتي لسلسلة المبيعات عند الفجوات الزمنية: $k = 1, 2, 3$.

2- أحسب معاملات الارتباط الجزئي ϕ_{11}، ϕ_{22} و ϕ_{33} باستخدام معادلات *Yule – Walker*.

3- أرسم شكل دالة الارتباط الذاتي الجزئي لسلسلة المبيعات.

المسألة 03: لتكن لدينا السلسلة الزمنية Y_t التالية:

الزمن t	1	2	3	4	5
Y_t	16	26	6	16	16

1- قدر الارتباط الذاتي لكل الفجوات الزمنية الممكنة (أي: $\forall k = 1, 2, 3, ..$).

2- ثم ارسم شكل دالة الارتباط الذاتي بين قيم السلسلة.

3- قدر دالة الارتباط الذاتي الجزئي للسلسلة.

4- أرسم شكل دالة الارتباط الذاتي الجزئي.

5- ما هو الملاحظ على شكلي الدالتين؟.

حل السلسلة 04

حل المسألة 01:

1– تعتبر دالة الارتباط الذاتي الجزئي $PACF$ ذات أهمية بالغة في تحليل السلاسل الزمنية، وكما ذكرنا من خلال دروس المقياس فهي من الأدوات المساعدة على التعرف على طبيعة مفردات السلسلة والعلاقات في ما بينها، كما تساعد على تحديد النموذج المناسب للتفسير والتنبؤ، وتستخدم دالة الارتباط الذاتي الجزئي في منهجية *Box–Jenkinz*، وخاصة في تحديد الفجوات الزمنية والرتب بالنسبة للنماذج العشوائية كالانحدار الذاتي (AR)، المتوسطات المتحركة (MA) وغيرهما.

2– خصائص دالة الارتباط الذاتي الجزئي (**أنظر محاضرات المقياس ص ص 27–28**).

3– إثبات صحة الآتي:

أ- ϕ_{11} تعبر عن الارتباط الذاتي الجزئي بين قيمتين (أو متغيرين) متتاليتين في السلسلة لا تتوسطهما قيم أخرى، فلو افترضنا النموذج التالي حسب تقنية Yule–Walker:

$$Y_t = \phi_{11}Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

وعند ضرب المعادلة في Y_{t-1} سنحصل على الارتباطات كالتالي

$$\rho(1) = \phi_{11}\rho(0)$$

ونعلم أن $\rho(0)=1$ دوما، وبالتالي نحصل على المطلوب وهو:

$$\rho(1)=\phi_{11}$$

ب– هذه المعادلة تعبر عن قيمة الارتباط الذاتي بين قيمتين الفجوة الزمنية بينهما k=2، ونحصل على المعادلة بإتباع الآتي:

- نأخذ المعادلة التالية:

$$Y_t = \phi_{21}Y_{t-1} + \phi_{22}Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

- نقوم بضرب المعادلة في Y_{t-1} فنحصل على الآتي:

$$\rho(1)= \phi_{21}\rho(0)+ \phi_{22}\rho(1) \quad \dots\mathbf{1}$$

- نقوم بضرب المعادلة مرة ثانية في Y_{t-2} فنحصل على:

$$\rho(2) = \phi_{21}\rho(1)+ \phi_{22}\rho(0) \quad \dots \mathbf{2}$$

- يتم الحصول على قيمة الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{22} باستخدام المصفوفات، وذلك بتقسيم محدد المصفوفة على المصفوفة نفسها، أي:

$$\phi_{22}= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho(2)-\rho(1)^2}{1-\rho(1)^2}$$

* البسط يمثل محدد المصفوفة والمقام المصفوفة وقيمها مأخوذة من المعادلتين 1 و2.

حل المسألة 02: 1- يتم حساب معاملات الارتباط الذاتي للفجوات k= 1, 2, 3 بنفس الطريقة في السلسلة 03، أي:

$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+3} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+2} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+1} - \bar{Y})$	$(Yt - \bar{Y})^2$	Y_t المبيعات	t
--	--	--	360000	4000	1
--	--	210000	122500	4250	2
--	330000	192500	302500	4050	3
60000	35000	55000	10000	4500	4
17500	27500	5000	2500	4550	5
110000	20000	10000	40000	4400	6
-5000	-2500	-10000	2500	4650	7
-6500	-26000	6500	16900	4730	8
-26000	8500	22100	28900	4770	9
21000	71400	71400	176400	5020	10
62400	81600	201600	230400	5080	11
102000	252000	288000	360000	5200	12
Σ= 335400	Σ = 797500	Σ= 1052100	Σ =1652600	Σ= 55200	

$$\bar{Y} = \frac{55200}{12} = 4600$$

- عند k=1:

$$\hat{\rho}(K=1) = \frac{1052100}{1652600} = 0.6$$

- عند k=2:

$$\hat{\rho}(K=2) = \frac{797500}{1652600} = 0.48$$

- عند k=3:

$$\hat{\rho}(K=3) = \frac{335400}{1652600} = 0.20$$

ما يلاحظ هو أنه كل كبرت الفجوة الزمنية k كلما تناقصت قيمة الارتباط الذاتي بين قيم السلسلة.

2- حساب معاملات الارتباط الجزئي ϕ_{11}، ϕ_{22} و ϕ_{33} باستخدام معادلات $Yule - Walker$.

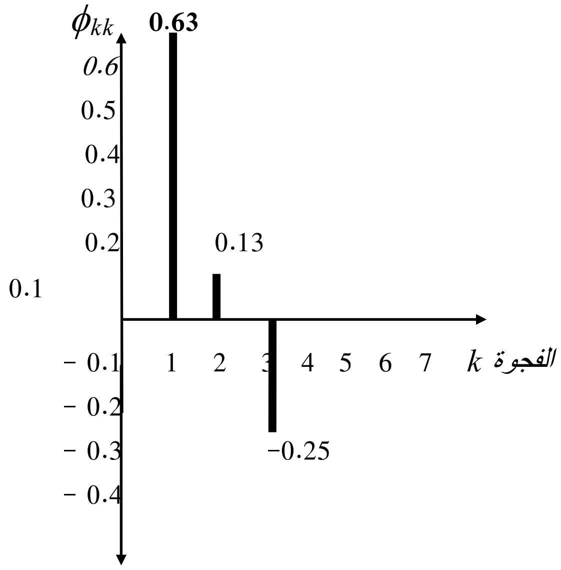
$$\phi_{11} = \rho(1) = \rho(k=1) = 0.63$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.63 \\ 0.63 & 0.48 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.63 \\ 0.63 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0.0831}{0.6031} = 0.13$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.63 & 0.63 \\ 0.63 & 1 & 0.48 \\ 0.48 & 0.63 & 0.20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.63 & 0.48 \\ 0.63 & 1 & 0.63 \\ 0.48 & 0.63 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-0.088981}{0.356824} = -0.25$$

ما يلاحظ أيضا على قيم معامل الارتباط الجزئي هو أنه كل كبرت الفجوة الزمنية k كلما تناقصت قيمته بين قيم السلسلة، وهو ما يؤكد تأثره بالتغيرات في الفجوة k.

3- تأخذ دالة الارتباط الذاتي الجزئي لسلسلة المبيعات الشكل التالي:



حل المسألة 03: لتكن لدينا السلسلة الزمنية Y_t التالية:

الزمن t	1	2	3	4	5
Y_t	16	26	6	16	16

1- تقدير الارتباط الذاتي لكل الفجوات الزمنية الممكنة ($\forall k = 1, 2, 3, 4$) يتم بإتباع نفس الخطوات في حل مسائل سابقة:

- **عند: k=1:**

$$\bar{Y} = \frac{80}{5} = 16 \qquad \sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2 = 0 + 100 + 100 + 0 + 0 = 200$$

$$\sum_{t=1}^{4}[(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+1} - \bar{Y})]$$
$$= (16-16)(26-16) + (26-16)(6-16) + (6-16)(16-16) + (16-16)(16-16)$$
$$= -100$$

$$\hat{\rho}(K = 1) = -\frac{100}{200} = -0.5$$

- **عند: k=2:**

$$\sum_{t=1}^{3}[(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+2} - \bar{Y})] = (16-16)(6-16) + (26-16)(16-16) + (6-16)(16-16) = 0$$

$$\hat{\rho}(K = 2) = \frac{0}{200} = 0$$

- **عند: k=3:**

$$\sum_{t=1}^{2}[(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+3} - \bar{Y})] = (16-16)(16-16) + (26-16)(16-16) = 0$$

$$\hat{\rho}(K = 3) = \frac{0}{200} = 0$$

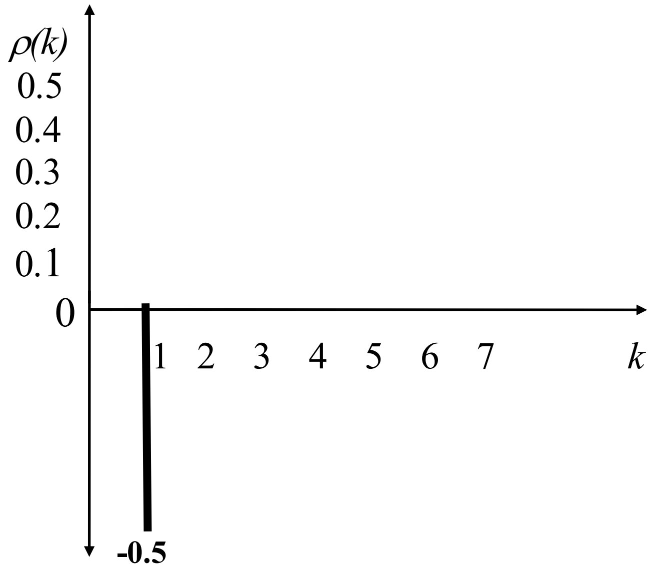
- **عند: k=4:**

$$\sum_{t=1}^{1}[(Y_t-\bar{Y})(Y_{t+4}-\bar{Y})]=(16-16)(16-16)=0$$

$$\hat{\rho}(K=4)=\frac{0}{200}=0$$

ما يلاحظ على هذه السلسلة أنها لا تتأثر بالفجوة الزمنية K ابتداء من الفجوة الثانية.

2- شكل دالة الارتباط الذاتي:



3− تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي للسلسلة يتم بنفس الطريقة في المسألة السابقة:

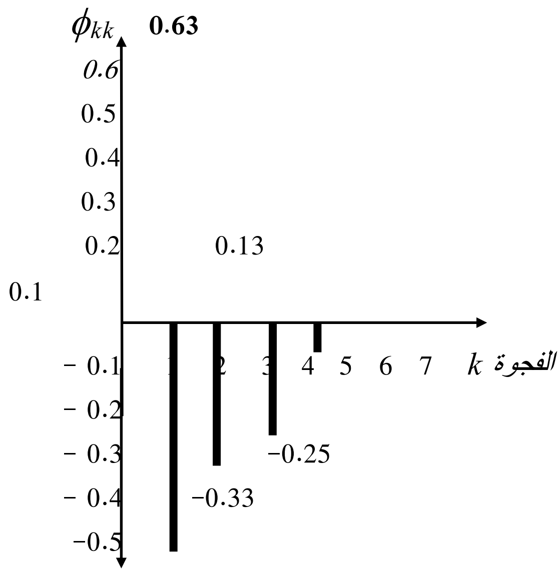
$\phi_{11}=\rho(1)=\rho(k=1)=\mathbf{-0.5}$

$$\phi_{22}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho(1)\\ \rho(1) & \rho(2)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho(1)\\ \rho(1) & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-0.25}{0.75}=\mathbf{-0.33}$$

$$\phi_{33}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho(1) & \rho(1)\\ \rho(1) & 1 & \rho(2)\\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho(1) & \rho(2)\\ \rho(1) & 1 & \rho(1)\\ \rho(2) & \rho(1) & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -0.5 & -0.5\\ -0.5 & 1 & 0\\ 0 & -0.5 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -0.5 & 0\\ -0.5 & 1 & -0.5\\ 0 & -0.5 & 1\end{vmatrix}}=\mathbf{-0.25}$$

$$\phi_{kk}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho(1) & \rho(2) & \rho(1)\\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \rho(2)\\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \rho(3)\\ \rho(3) & \rho(2) & \rho(1) & \rho(4)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho(1) & \rho(2) & \rho(3)\\ \rho(1) & 1 & \rho(1 & \rho(2)\\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \rho(1)\\ \rho(3) & \rho(2) & \rho(1) & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0.5 & 0 & -0.5\\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0\\ 0 & -0.5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -0.5 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0.5 & 0 & 0\\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0\\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5\\ 0 & 0 & -0.5 & 1\end{vmatrix}}=\mathbf{-0.023}$$

4- شكل دالة الارتباط الذاتي الجزئي كما يلي:



ما يلاحظ على الشكل أنه كلما زادت الفجوة k كلما اقتربت ϕ من الصفر، وهو ما يدل على أن الترابط بين قيم السلسلة يتناقص كلما ابتعدت عن بعضها البعض.

5- ما يلاحظ على شكلي الدالتين هو أن قيم الارتباط الذاتي الجزئي تقترب من الصفر كلما زادت الفجوة الزمنية، وهذا يدل على مدى تأثره ب K على عكس الارتباط الذاتي الذي لم يتأثر بها ابتداء من k=2، وهو ما يدل على أن الارتباط الذاتي الجزئي هو أفضل وأكثر دقة من الارتباط الذاتي في عملية قياس انطلاقا الفجوة الثانية.