كلية العلوم الاقتصادية　　　　　　السنة الجامعية : 2020/2019

سنة أولى جذع مشترك *LMD*.　　　　　　مقياس الرياضيات -2-

سلسلة تمارين رقم: 06

التمرين الأول: بين فيما إذا كانت التطبيقات التالية خطية أم لا:

1- $f : IR \to IR$

$x \longmapsto f(x) = 3.x$

2- $f : IR^2 \to IR^2$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (2x - y, x + y)$

3- $f : IR^3 \to IR^3$

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x^2, x, y)$

التمرين الثاني: ليكن التطبيق التالي حيث :

$f : IR^2 \to IR^2$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (2x - 4y, x - 2y)$

1- بين أنه خطي.
2- عين كلا من : $Im(f)$, $ker(f)$.
3- أحسب كلا من $dimIm(f)$, $dim\ ker(f)$.
4- هل (f) متباين و هل هو غامر.

التمرين الثالث : ليكن التطبيق المعرف ب:

$f : IR^2 \to IR^2$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (2x + y, x - y)$

عين $Ker(f)$ و $Im(f)$ و هل هو غامر

التمرين الرابع: ليكن التطبيق التالي حيث :

$f : IR^2 \to IR$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x - y$

1- بين أنه خطي ثم عين $Im(f)$, $ker(f)$
2- هل هومتباين هل هو غامر و هل هو تقابلي ثم أوجد كلا من $dimIm(f)$, $dim\ ker(f)$.

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مقياس : رياضيات II

السنة أولى : جذع مشترك

حل السلسلة رقم 06 .
خاصة بالتطبيقات الخطية

تمرين 01 :

① $f(x) = 3.x$

(f خطي) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall x, x' \in \mathbb{R} : f(\alpha x + \beta x') = \alpha f(x) + \beta f(x')\right)$

لدينا

$$f(\alpha x + \beta x') = 3(\alpha x + \beta x') = \alpha . 3x + \beta . 3x'$$
$$= \alpha f(x) + \beta f(x')$$

إذن f خطي .

② $f(x,y) = (2x - y, x + y)$

[f خطي] $\Leftrightarrow$ $\left(\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall X = (x,y), X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2 : f(\alpha X + \beta X') = \alpha f(X) + \beta f(X')\right)$

$$f(\alpha X + \beta X') = f\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') \\ \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\alpha x - \alpha y \\ \alpha x + \alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta x' - \beta y' \\ \beta x' + \beta y' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2x' - y' \\ x' + y' \end{pmatrix}$$

$$= \alpha f(x,y) + \beta f(x', y') = \alpha f(X) + \beta f(X') \Rightarrow$$ f خطي

③ $f(x,y) = \cancel{(2x, 4y, x}\ (x^2, x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

$$f(\alpha X + \beta X') = f\begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha x + \beta x')^2 \\ \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix}$$

لا يمكن فصل $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

إذن

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2 x^2 + 2\alpha x \cdot \beta x' + \beta^2 x'^2 \\ \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x'^2 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

فهو ليس خطي .

تمرين 02 :

$$f(x,y) = (2x-4y, x-2y) = \begin{pmatrix} 2x-4y \\ x-2y \end{pmatrix}$$

① خطية f

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} ; \forall X=(x,y), X'=(x',y') \in \mathbb{R}^2 ;$

$$f(\alpha X + \beta X') = \alpha f(X) + \beta f(X')$$

لدينا

$$f(\alpha X + \beta X') = f\begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(\alpha x + \beta x') - 4(\alpha y + \beta y') \\ \alpha x + \beta x' - 2(\alpha y + \beta y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha x - 4\alpha y \\ \alpha x - 2\alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta x' - 4\beta y' \\ \beta x' - 2\beta y' \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 2x-4y \\ x-2y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2x'-4y' \\ x'-2y' \end{pmatrix} = \alpha f(X) + \beta f(X')$$

إذن f خطي

② $\ker f$, $\mathrm{Im} f$

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \right\}$$

لدينا

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x-4y \\ x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x-4y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y \ , \ \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} \right\} y \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{2} \quad \ker f = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ , \ \ker f = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right]$$

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 1}$$

بما أن $\operatorname{Ker} f \neq \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ فهو ليس متباين.

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \;/\; \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}2x-4y\\x-2y\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} \right\}$$

أي $\operatorname{Im} f = \left[\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}\right\}\right]$

لنبرهن الاستقلال الخطي لهذين الشعاعين

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 4\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2\beta$$

أي الشعاعين مرتبطين خطياً لأن $\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

إذن $\boxed{\dim \operatorname{Im} f = 1}$

بما أن $\dim \operatorname{Im} f \neq 2$ فهو ليس غامر

حيث: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

تمرين 03:

$$f(x,y) = (2x+y, x-y)$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;/\; f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \right\}$$

لدينا، $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x = y \\ x = y \end{matrix} \Rightarrow x = y = 0$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

أي أن f متباين.

$$\dim \operatorname{Ker} f = 0$$

$$\mathrm{Im}f = \left\{ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

لدينا

$$\mathrm{Im}f = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

أي

$$\mathrm{Im}f = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right]$$

لدينا

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f$$

$$2 = 0 + \dim \mathrm{Im}f$$

إذن : $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim \mathrm{Im}f$

فهو غامر

تمرين 04 :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x - y$$

f خطي :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X = (x,y), X' = (x',y') \in \mathbb{R}^2 :$$

$$f(\alpha X + \beta X') = \alpha f(X) + \beta f(X')$$

لدينا

$$f(\alpha X + \beta X') = f\begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix} = \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y'$$

$$= \alpha(x-y) + \beta(x'-y') = \alpha f(X) + \beta f(X')$$

ومنه f خطي.

$$\mathrm{Ker}f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}} \right\}, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x - y = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

$$\mathrm{Ker}f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathrm{Ker}f = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right]$$

$$\dim \mathrm{Ker}f = 1$$