وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف ـ المسيلة-

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير وعلوم المالية و المحاسبة
سنة أولى جذع مشترك L.M.D
قسم علوم المالية والمحاسبة

حل سلسلة التمارين رقم :07

الـفـصـيـلـة الـرابـعـة

قسم علوم المالية والمحاسبة

مقياس : الرياضيات-2-

إعداد الأستاذ : ديلمي مصطفى

السنة الجامعية: 2019 / 2020

كلية العلوم الاقتصادية **السنة الجامعية : 2020/2019**

سنة أولى جذع مشترك *LMD*.

حل سلسلة تمارين رقم:*07*

التمرين الأول: *لتكن المصفوفتين* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

1- أوجد: $A^t, B^t, (A+B)^t, A^t + B^t$ ؟ ثم أوجد: $(A.B)^t, A^t.B^t$ وماذا تستنتج ؟

الحل

إيجاد $A^t, B^t, (A+B)^t, A^t + B^t$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ نفس الشيء بالنسبة ل B^t ثم لدينا $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ ومنه

$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, $(A+B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

إيجاد: $(A.B)^t$ نحسب أولا $A.B$ نجد:. $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$

وعليه نجد : $(A.B)^t = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$

إيجاد: $A^t.B^t$ مما سبق نجد : $A^t.B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}$

لكن $B^t.A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$

نستنتج أن : $(A.B)^t = B^t.A^t$

التمرين الثاني: *لتكن المصفوفتين* $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

-أحسب: $A^t, B^t, -B, A+B, A-B, A, 3.$ ؟ هل يمكن حساب $A.B$ ؟ أحسب : $A.B^t$ ؟

الحل

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, -B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}, A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3.A = 3.\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 & 6 \\ 3 & 15 & 0 & 9 \\ 6 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

لا يمكن حساب $A.B$ لأن عدد أعمدة A لا يساوي عدد أسطر B

$$A.B^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1 + (-4).2 + 1.(-1) + 2.(0) & \ldots\ldots & \ldots. \\ \ldots\ldots & \ldots. & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{pmatrix}$$

هذا العنصر موجود في السطر الأول العمود الأول وبالتالي نقوم بضرب السطر الأول من A في العمود الأول من B مع الجمع و نكمل بنفس الطريقة لإيجاد باقي العناصر.

التمرين الثالث : *لتكن المصفوفتين:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1- هل A, B قابلتين للقلب ؟ ثم أحسب مقلوبيهما في حالة الوجود مستعملا المصفوفة المرافقة؟

2- لتكن المصفوفة C حيث : $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ أوجد مرتبة C ؟

الحل

1- لكي نثبت أن A, B قابلتين للقلب أم لا يجب حساب المحدد أولا فإذا كان المحدد يختلف على الصفر فهي قابلة للقلب وان كان يساوي الصفر فهي غير قابلة للقلب.

$=0.(-1)-1.(-1)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.\boxed{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} - (1).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

ومنه المصفوفة A قابلة للقلب

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (1).\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ وبالتالي B غير قابلة للقلب.

إذن يمكن حساب مقلوب A باستعمال المصفوفة المرافقة وعليه:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times C^t$$

لنحسب الآن عناصر المصفوفة $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$

لدينا : $c_{11} = (-1)^{1+1}.|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $c_{12} = (-1)^{1+2}.|A_{12}| = 2$,

$c_{13} = (-1)^{1+3}.|A_{13}| = -1$

$c_{21} = (-1)^{2+1}.|A_{21}| = 1$, $c_{22} = (-1)^{2+2}.|A_{22}| = -1$,

$c_{23} = (-1)^{2+3}.|A_{23}| = 2$

$c_{31} = (-1)^{3+1}.|A_{31}| = 1$,

$$c_{32} = (-1)^{3+2}.|A_{32}| = -1 \ , c_{33} = (-1)^{3+3}.|A_{33}| = -1 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

إذن $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

<u>2- مرتبة C</u> : نلاحظ أن C تحتوي على أربعة أسطر وثلاث أعمدة وعليه فإن مرتبتها هي أكبر عدد من الأشعة السطرية أو العمودية المستقلة خطيا وبالتالي فمرتبتها $rang(C) \leq 4$.

بأخذ الأشعة السطرية نجد أنها مرتبطة خطيا وبالتالي $rang(C) \leq 3$

نحسب محدد المصفوفة المستخرجة ولتكن: $C_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

ومنه نجد : $|C_1| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$

بما أن محدد C_1 يختلف عن الصفر فإن : $rang(C_1) = 3$ وبالتالي مرتبة C من مرتبة C_1

إذن : $rang(C) = 3$.

التمرين الرابع: *لتكن المصفوفتين:* $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

- أحسب محددي A, B ؟ ثم تأكد من أن $|B| = 4^3|A|$ ولماذا ؟

الحل

حساب محددي A, B : نلاحظ أن كل من A, B عبارة عن مصفوفتين مثلثيتين علويتين وبالتالي كما أخذنا في الدرس أن محدديهما عبارة عن جداء عناصر القطر الرئيسي وعليه نجد:

$$|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6,\ \ |B| = 4 \times 8 \times 12 = 384$$

التأكد من أن : $|B| = 4^3|A|$ بالفعل $|B| = 384 = 4^3.|A| = 4^3 \times 6 = 384$

السبب لأن A, B كلاهما من النمط (3, 3) بالإضافة إلى أن $B = 4 \times A$.

التمرين الخامس: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

1- أحسب محدد A ثم أوجد A^{-1}؟

باستعمال A^{-1} أوجد حلا للجملة $A.X = b$ حيث: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ؟

الحل

1-حساب المحدد ل: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

نتبع نفس الطريقة في حلول التمارين السابقة نجد أن : $|A| = 64 \neq 0$ ومنه A قابلة للقلب

إيجاد المقلوب (المعكوس) ل: A

إذن يمكن حساب مقلوب A باستعمال المصفوفة المرافقة وعليه:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times C^t$$

لنحسب الآن عناصر المصفوفة $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$

لدينا : $c_{11} = (-1)^{1+1}.|A_{11}| = 12$ ، $c_{12} = (-1)^{1+2}.|A_{12}| = 6$ ،

$$c_{13} = (-1)^{1+3}.|A_{13}| = -16$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}.|A_{21}| = 4 \ , \quad c_{22} = (-1)^{2+2}.|A_{22}| = 2 \ ,$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}.|A_{23}| = 16$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}.|A_{13}| = 12 \ ,$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}.|A_{32}| = -10 \ , c_{33} = (-1)^{3+3}.|A_{33}| = 16$$

إذن $C^t = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^t = \frac{1}{64}.\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$

باستعمال A^{-1} إيجاد حلا للجملة $A.X = b$ حيث: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A^{-1}.A = I$

نعلم أن (أنظر الدرس) $A.X = b \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.b \Rightarrow X = A^{-1}.b$

مصفوفة الوحدة I

وبالتالي نحصل على : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{64}.\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{16} \\ \frac{-15}{32} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

التمرين السادس: حل الجملة التالية:

1) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$

الحل

1) حل الجملة: $\begin{cases} 1.x_1 + 1.x_3 = 1 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 = 2 \\ 1.x_2 + 1.x_3 = 3 \end{cases}$ إذن يمكن كتابة هذه الجملة على الشكل التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نحسب أولا: $\boldsymbol{A^{-1}}$ (أنظر التمارين السابقة كيفية إيجاد A^{-1}) فنجد: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ومنه حل الجملة هو:

$$X = A^{-1}.b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) حل الجملة الثانية إما بنفس الطريقة أو إستعمال طريقة كرامر رأينا في حل الجملة الأولى طريقة المقلوب وبالتالي نستعمل طريقة كرامر لحل الجملة الثانية وعليه:

من الجملة $\begin{cases} 2x + 1.y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$ نجد: $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

طريقة كرامر تعتمد على العبارة التالية: $\boldsymbol{x_i = \frac{|A_i|}{|A|}}$ حيث $\boldsymbol{A_i}$ هي المصفوفة **A** مع تعويض العمود رقم **i** بالشعاع **b.**

-1 نحسب $\det(A)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 26$$

-2 نحسب $|A_1|$:

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{26} = 1$$

-3 نحسب $|A_2|$:

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{vmatrix} = -78 \Rightarrow y = \frac{-78}{26} = -3$$

-4 نحسب $|A_3|$:

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}2&1&5\\3&-2&5\\5&-3&16\end{vmatrix}=-52\Rightarrow z=\frac{-52}{26}=-2$$

ومنه الحل هو : $X=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$

<u>**التمرين السابع**</u>**: يبقى موجه للطلبة

لتكن المصفوفات : $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\2&0&-1\\-2&1&4\end{pmatrix}$

و المصفوفة C حيث : $C=\begin{pmatrix}\frac{\propto}{2}&-1&-1\\2&-2&0\\1&2\propto&-2\end{pmatrix}$ و $\propto$ عدد حقيقي.

1- أوجد كلا من $A^t, B^t, (A+B)^t, A^t+B^t\ ,\ A+B$ ؟

2 - أحسب $A.B$ أحسب $A.B^t$. ؟

3- أحسب محدد A. ؟

4- أوجد مرتبة A . ؟

5- أثبت أن : $A^2=2I+A$ ثم استنتج أن A قابلة للقلب . ؟

6- عبر عن A^{-1} بدلالة A . ؟

7- أوجد المصفوفة D حيث : $D=2C$. ؟

8- أحسب $\det(D)$ وأستنتج $\det(C)$. ؟

9- أوجد قيم $\propto$ حتى تكون D قابلة للقلب. ؟

10- أوجد المصفوفة D^{-1} من أجل $\propto=0$. ؟

11- حل الجملة الخطية **A.X=b** حيث: $b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$؟

12- عين كلا من a,b,c التي من أجلها يكون $(1,-1,\ 2)$ حلا للجملة :

$$\begin{cases}ax+by-3z=-3\\-2x-by+z=-1\\ax+3y-cz=-1\end{cases}$$