السنة الأولى جذع مشترك: SEGC
مقياس: الاقتصاد الجزئي 02

السلسلة: 03

المسألة 01: أجب على ما يلي:

1- اشرح مستعينا بالرسم البياني العلاقة بين منحنيات التكاليف في المدى القصير، وماذا تعكس؟.

2- أثبت صحة العلاقة التالية وأعطي مدلولها الاقتصادي:

$$CM = \frac{dCm}{dQ}\ Q + Cm = \frac{dCmv}{dQ}\ Q + Cmv$$

المسألة 02: قدمت مؤسسة ما البيانات المبينة في الجدول التالي والتي تتعلق بالكميات المنتجة شهريا والتكاليف المرتبطة بها خلال سنة 2019:

الشهر	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
الإنتاج (وحدة)	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
التكاليف المتغيرة (دج)	175	335	485	600	750	1010	1310	1660	2160	2860	3745	4795

1- أرسم منحنيات التكاليف في المدى القصير، ثم بين ما إذا كانت تتناسب وقانون تناقص الغلة، علما بأن المؤسسة حديثة النشأة وبدأت الإنتاج في 2019/01/01، وقدرت تكاليفها الثابتة بـ 2340دج.

2- ما هي مستويات الإنتاج التي تتحقق عندها أدنى قيم لـ Cm، Cmv و CM؟.

3- حدد مجالات تغير معدل التكاليف.

المسألة 03: دالة التكاليف المتغيرة لمؤسسة ما في معطاة بالعلاقة التالية:

$$Cv = 2Q^3 - 30Q^2 + 150Q$$

1- أحسب قيمتي Q التي تحقق المساواة التالية: $Cmv=CM$، وماذا يمثل المجال بينهما؟

2- أحسب المستوى الأمثل للإنتاج عند $C_f = 0$.

المسألة 04: دالة إنتاج مؤسسة ما في المدى القصير معطاة بالعلاقة التالية:

$$Q = -0.1L^3 + 6L^2 + 12L$$

1- أحسب قيمتي L اللتان تكون عندهما PM_L و Pm_L أعظميتان.

2- أحسب قيمة Q التي تكون عندها التكلفة المتوسطة المتغيرة Cmv في حدها الأدنى، علما أن سعر الوحدة من L هو w.

المسألة 05: لتكن لدينا دالة الإنتاج التالية:

$$Q = AL^{1/4}\ K^{3/4}$$

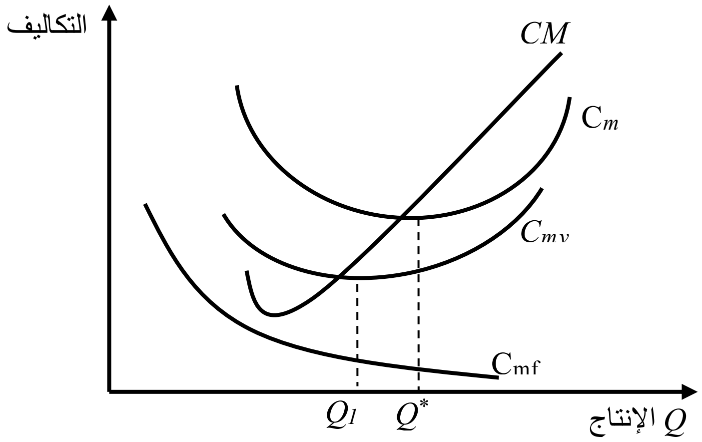
1- إذا افترضنا أن كمية رأس المال ثابتة، أي: $K = \bar{K}$ وكمية العمل L متغيرة في المدى القصير، وأن $w = 1$ و $i = 2$، اشتق معادلة التكاليف في المدى القصير.

2- إذا افترضنا أن سعر العمل زاد، أي: $w' = 2$ مع بقاء العوامل الأخرى على حالها، هل تتأثر معادلة التكاليف في المدى القصير؟ ولماذا؟.

حل السلسلة 03 – اقتصاد جزئي 02

حل المسألة 01: أجب على ما يلي:

1- العلاقة بين منحنيات التكاليف في المدى القصير مبينة في الشكل البياني التالي:



العلاقة بين منحنيات التكاليف في المدى القصير

- **العلاقة بين C_{mv} وC_m:**

منحنيا C_{mv} و C_m حسب النظرية التقليدية يأخذان شكل حرف U ويعكسان قانون تناقص الغلة، كما أن C_{mv} هي جزء من C_m، إلا أن أدنى نقطة على منحنى C_m تكون إلى يمين أدنى نقطة على منحنى C_{mv} كما هو مبين في الشكل، ويرجع السبب في ذلك إلى الآتي:

- بين مستويي الإنتاج Q_1 وQ^* تتناقص C_m نتيجة تناقص C_{mf} بمعدل أكبر من معدل التزايد في C_{mv}؛
- عندQ^* (المستوى الأمثل للإنتاج في المدى القصير) يتساوى المعدلان؛
- عند أي كمية أكبر من Q^* تصبح C_m تتزايد نتيجة تزايد C_{mv} بمعدل اكبر من معدل التناقص في C_{mf}.

- **العلاقة بين CM وC_m وC_{mv}**

منحنى التكلفة الحدية يقطع كل من منحنى التكلفة المتوسطة الكلية C_m ومنحنى التكلفة المتوسطة المتغير C_{mv} عند أدنى نقطتين لهما.

- منحنيات التكاليف في المدى القصير (منحنيات Cm، Cmv و CM) حسب النظرية التقليدية هي مقلوبات منحنيات الإنتاج في المدى القصير وتعكس **قانون تناقص الغلة** والذي ينص على أن التكاليف الكلية Ct والمتغيرة Cv تتزايد في البداية بمعدل متناقص (لان الإنتاج يتزايد بمعدل المتزايد) وفي مرحلة ثانية تبدأ تتزايد التكاليف بمعدل متزايد (لأن الإنتاج يبدأ في التزايد بمعدل متناقص) **(أنظر دروس المقياس)**.

2- **البرهان الرياضي على صحة العلاقة المعطاة:**

لتكن دالة تكاليف مؤسسة ما في المدى القصير:

$$C_t=C_m.Q$$

حيث: $C_m=f(Q)$

دالة التكلفة الحدية:

$$CM=\frac{dCt}{dQ}=\frac{dC_m}{dQ}Q+\frac{dQ}{dQ}C_m$$

$$CM=\frac{dC_m}{dQ}Q+C_m$$

ومنه:

وبنفس الطريقة نستطيع أن نجد قيمة التكلفة الحدية من التكاليف المتغيرة، حيث:

$Cv=Cmv.Q$

حيث: $Cmv=f(Q)$

دالة التكلفة الحدية:

$$CM = \frac{dCv}{dQ} = \frac{dC_{mv}}{dQ} Q + \frac{dQ}{dQ} C_{mv}$$

$$CM = \frac{dC_{mv}}{dQ} Q + C_{mv}$$

ومنه:

$$CM = \frac{dCm}{dQ}\ Q + Cm = \frac{dCmv}{dQ}\ Q + Cmv$$

<u>وهو ما يدل على أنه يمكن الحصول على دالة تكلفة الحدية باشتقاق دالة التكاليف الكلية أو دالة التكاليف المتغيرة.</u>

– **<u>مدلولها الاقتصادي</u>** أنها تثبت صحة العلاقة بين منحنيات التكاليف في المدى القصير والمذكورة سابقا، ويستنتج من ذلك الآتي:

– إذا كانت: $\frac{dC_{mv}}{dQ} < 0$ تكون $CM < C_{mv}$؛

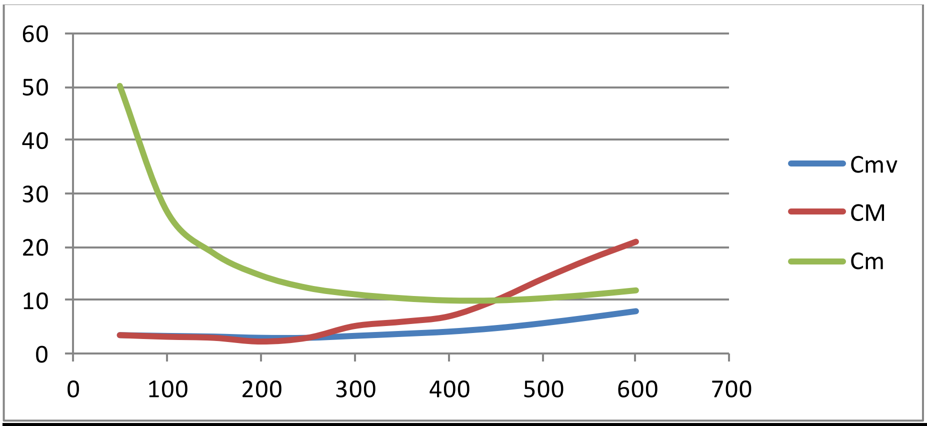
– إذا كانت: $\frac{dC_{mv}}{dQ} = 0$ تكون $CM = C_{mv}$؛

– إذا كانت: $\frac{dC_{mv}}{dQ} > 0$ تكون $CM > C_{mv}$.

<u>حل المسألة 02:</u>

1- رسم منحنيات التكاليف في المدى القصير: تتم معالجة البيانات المعطاة في الجدول التالي:

الشهر	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
الإنتاج (وحدة) Q	50	100	150	200	**250**	300	350	400	**450**	500	550	600
التكاليف المتغيرة Cv (دج)	175	335	485	600	750	1010	1310	1660	2160	2860	3745	4795
التكاليف الثابتة Cf (دج)	2340	2340	2340	2340	2340	2340	2340	2340	2340	2340	2340	2340
التكاليف الكلية Ct (دج)	2515	2675	2825	2940	3090	3350	3650	4000	4500	5200	6085	7135
Cmv	3.5	3.35	3.23	3.0	3.0	3.36	3.74	4.15	4.8	5.72	6.81	7.99
Cm	50.2	26.75	18.83	14.7	12.36	11.16	10.42	10	10	10.4	11.06	11.89
CM	3.5	3.2	3.0	2.3	3.0	5.2	6.0	7.0	10	14	17.7	21



ما يلاحظ على الشكل أنه يظهر العلاقات المذكورة سابقا بين منحنيات التكاليف في المدى القصير.

1- مستويات الإنتاج التي تتحقق عندها أدنى قيم لـ Cm، Cmv و CM والمتناسبة مع التحليل السابق تتمثل في المستويين:

250 وحدة $(CM=Cmv)$ و **450 وحدة** $(CM=Cm)$.

2- مجالات تغير معدل التكاليف تحدد على النحو التالي:

المجال 01: $]\ Q = 50\ ;\ Q = 200\ [$ أي: $]\ CM = 3.5\ ;\ CM = 2.3\ [$

المجال 02: $]\ Q = 200\ ;\ Q = 450\ [$ أي: $]\ CM = 2.3\ ;\ CM = 10\ [$

__ملاحظة هامة:__ مجالات التغير في معدلات التكاليف تختلف عن مراحل الإنتاج، حيث هذه الأخيرة تتحدد مجالاتها حسب التناقص والتزايد في التكلفة المتغيرة المتوسطة ***Cmv***.

__حل المسألة 03:__ دالة التكاليف المتغيرة لمؤسسة ما في معطاة بالعلاقة التالية:

$$Cv = 2Q^3 - 30Q^2 + 150Q$$

1- حساب قيمتي Q اللتان تحققا المساواة التالية: $Cmv=CM$:

$$Cmv = CM = 2Q^2 - 30Q + 150 = 6Q^2 - 60Q + 150 \Rightarrow -4Q^2 + 30Q = 0$$

ويتحقق ذلك عند: $\boldsymbol{Q = 0}$ و $\boldsymbol{Q = 7.5}$.

المجال: $[Q = 0\ ;\ Q = 7.5[$ يمثل المرحلة الأولى للإنتاج (مجال تناقص Cmv).

2- يتحقق المستوى الأمثل للإنتاج عند أدنى قيمة لـ Cm، ما دامت $Cf = 0$ (التكاليف الثابتة معدومة) فإن التكاليف الكلية هي التكاليف المتغيرة، أي أن أدنى قيمة لـ Cmv تحقق المستوى الأمثل للإنتاج في المدى القصير، أي:

$$dCmv/dQ = 0 \Rightarrow 4Q - 30 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{Q^* = 7.5}$$

__حل المسألة 04:__ دالة إنتاج مؤسسة ما في المدى القصير معطاة بالعلاقة التالية:

$$Q = -0.1L^3 + 6L^2 + 12L$$

1- قيمتي L اللتان تكون عندهما PM_L و Pm_L أعظميتان هما:

$$PM_L = -0.3L^2 + 12L + 12 \Rightarrow dPM_L/dQ = -0.6L + 12 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L = 20} \text{ وحدة عمل}$$

$$Pm_L = -0.1L^2 + 6L + 12 \Rightarrow dPm_L/dQ = -0.2L + 6 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L = 30} \text{ وحدة عمل}$$

3- قيمة Q التي تكون عندها التكلفة المتوسطة المتغيرة Cmv في حدها الأدنى، علما أن سعر الوحدة من L هو $\boldsymbol{w}$ تحسب بتتبع خطوات الحل التالية:

- نعلم أن دالة التكاليف المتغيرة في المدى القصير هي: $Cv = wL$، ومنه دالة التكلفة المتغيرة المتوسطة تكون:

$$Cmv = Cv/Q = wL/Q = wL/-0.1L^3 + 6L^2 + 12L$$

$$Cmv = \frac{w}{-0.1L^2 + 6L + 12} = \frac{w}{Pm_L}$$

- القيمة الدنيا لـ Cmv نصل عليها من خلال المشتقة الأولى:

$$\frac{dCmv}{dQ} = 0 \Rightarrow \frac{d\left(\frac{wL}{Q}\right)}{dQ} = \frac{w\left(Q\frac{dl}{dQ} - L\right)}{Q^2} = 0 \quad (\text{حيث: } w \text{ ثابت})$$

- كما أنه عند $w > 0$ (الأجر موجب عادة) نجد:

$$\frac{dCmv}{dQ} = \frac{\left(Q\frac{dL}{dQ} - L\right)}{Q^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{Q}\frac{dL}{dQ} - \frac{L}{Q^2} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{QdQ}}{dL} - \frac{L}{Q^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{QdQ}}{dL} - \frac{L}{Q^2} = \frac{1}{Q\ PM_L} - \frac{1}{Q}\frac{1}{\frac{Q}{L}} = \frac{1}{Q\ PM_L} - \frac{1}{Q}\frac{1}{Pm_L} = 0$$

$$\frac{dCmv}{dQ} = \frac{1}{Q}\left(\frac{1}{PM_L} - \frac{1}{Pm_L}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{Q}\left(\frac{Pm_L - PM_L}{PM_L Pm_L}\right) = 0$$

- وعند $Q > 0$:

$$\frac{dCmv}{dQ} = \frac{1}{Q}\left(\frac{Pm_L - PM_L}{PM_L Pm_L}\right) = 0 \Rightarrow Pm_L - PM_L = 0$$

ومنه:

$$\frac{dCmv}{dQ} = 0 \Rightarrow Pm_L = PM_L$$

ما يلاحظ من ما تم التوصل إليه أن Cmv تكون في حدها الأدنى عند أعظم قيمة للإنتاجية المتوسطة Pm_L، وهو ما يثبت أن منحنى Cmv هو *مقلوب منحنى* Pm_L، وعليه تكون أعظم قيمة لـ Q عند $L=30$ التي تحقق المساواة $Pm_L = PM_L$ ومنه:

$$Q* = -0.1(30)^3 + 6(30)^2 + 12(30) = \mathbf{3060} \text{ وحدة}$$

<u>حل المسألة 05:</u> لتكن لدينا دالة الإنتاج التالية:

$$Q = AL^{1/4}K^{3/4}$$

1− إذا افترضنا أن كمية رأس المال ثابتة، أي: $K = \bar{K}$ وكمية العمل L متغيرة في المدى القصير، وأن $w = 1$ و $i = 2$، يتم اشتق معادلة التكاليف في المدى القصير بتتبع الخطوات التالية:

$$Q = AL^{1/4}\bar{K}^{3/4}$$
$$\text{St :}$$
$$C = L + 2\bar{K}$$

يمكن إيجاد معادلة التكاليف بإحدى الطريقتين: لاغرانج أو الطريقة الجبرية، والتي سنستخدمها في الحل:

عندما نعوض قيمة C في معادلة الإنتاج نجد:

$$Q = A(C - 2\bar{K})^{1/4}\bar{K}^{3/4} \Rightarrow Q^4 = A^4(C - 2\bar{K})\ \ \bar{K}^3$$

ومنه:

$$Q^4 = A^4(C - 2\bar{K})\ \ \bar{K}^3 = A^4C\bar{K}^3 - 2A^4\bar{K}^4$$

$$\Rightarrow Q^4 + 2A^4\overline{K}^4 = A^4 C\overline{K}^3 \Rightarrow C = \frac{Q^4}{A^4\overline{K}^3} + \frac{2A^4\overline{K}^4}{A^4\overline{K}^3}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q^4}{A^4\overline{K}^3} + 2\overline{K}$$

إذا افترضنا أن: $A,\overline{K} > 0$ وأن $\overline{K}$ ثابت:

$$C = \frac{Q^4}{A^4\overline{K}^3} + 2\overline{K} = 2\overline{K} + \frac{1}{A^4\overline{K}^3}\ Q^4$$

إذا افترضنا أيضا أن:

$$a = 2\overline{K}, \qquad b = \frac{1}{A^4\overline{K}^3}$$

تكون دالة التكاليف:

$$\boldsymbol{C = a + bQ^4}$$

2- إذا افترضنا أن سعر العمل زاد، أي: $w'=2$ مع بقاء العوامل الأخرى على حالها، تكون دالة (قيد) التكاليف:

$$C' = 2L + 2\overline{K} \Rightarrow L = \frac{C'}{2} - \overline{K}$$

- بالتعويض في دالة الإنتاج بقيمة L نجد:

$$Q = A(\frac{C'}{2} - \overline{K})^{1/4}\ \overline{K}^{3/4}$$

$$Q^4 = A^4(C'/2 - \overline{K})\quad \overline{K}^3 = \frac{1}{2}A^4 C'\overline{K}^3 - A^4\overline{K}^4$$

$$\Rightarrow Q^4 + A^4\overline{K}^4 = \frac{1}{2}A^4 C'\overline{K}^3 \Rightarrow C' = \frac{2Q^4}{A^4\overline{K}^3} + \frac{2A^4\overline{K}^4}{A^4\overline{K}^3}$$

$$\Rightarrow C' = \frac{2Q^4}{A^4\overline{K}^3} + 2\overline{K} = 2(\frac{1}{A^4\overline{K}^3}\ Q^4 + \overline{K})$$

- كالعادة إذا افترضنا أيضا أن:

$$a = 2\overline{K}, \qquad b = \frac{1}{A^4\overline{K}^3}$$

- تكون دالة التكاليف الجديدة:

$$\boldsymbol{C' = a + 2bQ^4}$$

ما يلاحظ أن ميل دالة التكاليف تضاعف من b إلى $2b$، وحيث أن: $b > 0$، وهو ما يدل على أن مضاعفة الأجر w من 1دج إلى 2دج مع بقاء العوامل الأخرى على حالها، أدى إلى مضاعفة تأثير الوحدة من Q على التكاليف، وأدى إلى زيادة التكاليف في المدى القصير ($C < C'$).