جامعة جامعة مُحَمَّد بوضياف بالمسيلة

القسم : LMD — كلية العلوم الاقتصادية و علوم التسيير والعلوم التجارية — المستوى الأول

المقياس : الاحصاء .2 . — سلسلة تمارين رقم 03 — السداسي : الثاني

التمرين الأول:

نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من العقاقير الطبية هي: 0,6 ، تناول هذا العقار 5 مصابين، إذا عرُف المتغير العشوائي x بأنه عدد (المستجيبين) حالات الشفاء (لهذا الدواء):

1 – ما هو نوع المتغير؟

2 - اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير $f(x)$.

3 – احسب الاحتمالات التالية: أ- ما احتمال استجابة 3 مرضى لهذا العقار؟

ب – ما هو احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟ ج - ما هو احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر؟

4 – احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الشفاء.

التمرين الثاني:

شركة لتعبئه المنتجات ، احتمال أن يكون أحد الصناديق المعبأة به سلع تالفة هو (0.3)، اخترنا عينه من أربعة صناديق. وكان التوزيع الاحتمالي لعدد الصناديق السليمة (x) كما هو واضح في الجدول الآتي:

عدد الصناديق السليمة	0	1	2	3	4	$\sum$
الاحتمال $P(X)$	0,0081	؟	0,2646	؟	0,2401	1

أ– حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (x) و اكتب دالته الاحتمالية .
ب – استكمل البيانات الناقصة في الجدول.
د – أحسب متوسط التوزيع و تباينه بطريقتين.

التمرين الثالث:

تنتج إحدى الآلات يوميا 400 وحدة، إذا كان متوسط عدد الوحدات المعيبة اليومية هو (4) وحدات احسب:
أ – احتمال ألا تنتج الآلة أية وحدة معيبة في يوم ما.
ب – احتمال إنتاج وحدتين معيبتين على الأكثر ، احتمال إنتاج وحدتين معيبتين على الأقل.
ج – المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع .

التمرين الرابع:

في مصنع لصناعة المصابيح ، من ضمن 100 مصباح نجد مصباح فاسد:
أ- إذا تمت التعبئة في صناديق تحمل 100 مصباح و أخذنا أحد هذه الصناديق:
1- ما هو احتمال أن يكون بها ثلاثة مصابيح أو أكثر فاسدة؟

2 - أحسب التوقع و الانحراف المعياري.

ب - إذا تمت التعبئة في صناديق تحمل 200 مصباح و أخذنا أحد هذه الصناديق:
1- ما هو احتمال أن يكون بها ثلاثة مصابيح أو أكثر فاسدة؟

2 - أحسب التوقع و الانحراف المعياري.

حل السلسلة الثالثة

حل التمرين الأول: التوزيع ثنائي الحدين

1. عدد حالات الاستجابة x متغير كمي منفصل، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو $X = \{x = 0,1,2,3,4,5\}$:

2. شكل دالة التوزيع: $q = 1 - 0,6 = 0,4 \quad p = 0,6\ ,\ N = 5$: $f(x) = C_x^n\ p^X\ q^{n-x}$

أي: $x = 0,1,2,3,4,5 \quad f(x) = C_x^5\ (0,6)^X\ (0,4)^{5-x}$

3. حساب احتمال شفاء:

3. أ. ثلاثة مرضى: $f(x) = C_3^5\ (0,6)^3\ (0,4)^{5-3} = \dfrac{5!}{(5-3)!3!}(0,6)^3\ (0,4)^{5-3} = 0,3456$

3. ب. مريض على الأقل: $f(x \geq 1) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 1 - f(0)$

$$= 1 - \left[C_0^5\ (0,6)^0\ (0,4)^{5-0}\right] = 1 - \left[1(1)\ \ (0,0102)\ \right] = 0,9897$$

3ج. مريضين على الأكثر: $f(x \geq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$

$$f(x \leq 2) = C_0^5\ (0,6)^0\ (0,4)^{5-0} + C_1^5\ (0,6)^1\ (0,4)^{5-1} + C_2^5\ (0,6)^2\ (0,4)^{5-2} = 0,3174$$

4 - احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الشفاء.

الوسط الحسابي : $\mu = n \times p = 5 \times 0,6 = 3$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{5 \times 0,6 \times 0,4} = 1,095$

حل التمرين الثاني: التوزيع ثنائي الحدين

أ. تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (x) و تحديد دالته الاحتمالية:

عدد الصناديق السليمة x متغير كمي منفصل، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو $X = \{x = 0,1,2,3,4\}$:

يخضع المتغير بتوزيع ثنائي الحدين $f(x) = C_x^n\ p^X\ q^{n-x}$ بالمعلمات التالية: $q = 1 - 0,7 = 0,3 \quad N = 5\ ,\ p = 0,7$

شكل دالة التوزيع:: $f(X = x) = C_x^4\ (0,7)^X\ (0,3)^{4-x}$

ب. استكمال البيانات الناقصة في الجدول.

$f(X = 1) = C_1^4\ (0,7)^1\ (0,3)^3 = 0,0756 \quad f(X = 3) = C_3^4\ (0,7)^3\ (0,3)^1 = 0,4116$

X	0	1	2	3	4	$\sum$
$P(X = x)$	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401	1

د – أحسب متوسط التوزيع و تباينه بطريقتين:

أ. من خلال الجدول:

X	0	1	2	3	4	$\sum$
$P(X = x)$	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401	1
$X \times P(x)$	0	0,0756	0,5292	1,2348	0,9604	2,8
$X^2 \times P(x)$	0	0,0756	1,0584	3,7044	3,8416	8,68

$\mu = E(x) = \sum xP(x) = 2,8$

$\sigma^2 = V(x) = \sum x^2 P(x) - \mu^2 = 8,68 - (2,8)^2 = 8,68 - 7,84 = 0,84$

$\sqrt{V(x)} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,84} = 0,91$

ب. مباشرة: الوسط الحسابي : $\mu = n \times p = 4 \times 0,7 = 2,8$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{4 \times 0,7 \times 0,3} = 0,91$

حل التمرين الثالث: توزيع بواسون

بما أن نسبة النجاح هنا ضعيفة جدا أي : $p = 4/400 = 0{,}01 < 0{,}05$ فإن الإنتاج المعيب للآلة يتبع توزيع بواسون $P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^X}{X!}$ بمتوسط $\lambda = 4$ أي: $P(X=x) = \dfrac{e^{-4}\,4^X}{X!}$

أ – احتمال ألا تنتج الآلة أية وحدة معيبة في يوم ما:

$$P(X=0) = \frac{e^{-4}\,4^0}{0!} = 0{,}0183$$

ب –1. احتمال إنتاج وحدتين معيبتين على الأكثر:

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{e^{-4}\,4^0}{0!} + \frac{e^{-4}\,4^1}{1!} + \frac{e^{-4}\,4^2}{2!} = 0{,}0183 + 0{,}0732 + 0{,}1465 = 0{,}238$$

ب –2. احتمال إنتاج وحدتين معيبتين على الأقل:

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 0{,}238 = 0{,}762$$

ج – المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع:

الوسط الحسابي : $\mu = \lambda = 4$ الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4} = 2$

حل التمرين الرابع: توزيع بواسون

بما أن نسبة النجاح هنا ضعيفة جدا أي : $p = 1/100 = 0{,}01 < 0{,}05$ فإن المصابيح الفاسدة يتبع توزيع بواسون $P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^X}{X!}$ بمتوسط $\lambda = n \times p = 0{,}01 \times 100 = 1$ أي: $P(X=x) = \dfrac{e^{-1}\,1^X}{X!} = \dfrac{1}{e\,.X!}$

أ. إذا تمت التعبئة في صناديق تحمل 100 مصباح و أخذنا أحد هذه الصناديق:

1. احتمال أن يكون بها ثلاثة مصابيح أو أكثر فاسدة: $P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 3)$

أي: $P(X \ge 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)]$

$$P(X=0) = \frac{1}{e\,.0!} = 0{,}367\ , P(X=1) = \frac{1}{e\,.1!} = 0{,}367\ , P(X=2) = \frac{1}{e\,.2!} = 0{,}183\ , P(X=3) = \frac{1}{e\,.3!} = 0{,}061$$

ومنه: $P(X \ge 3) = 1 - [0{,}367 + 0{,}367 + 0{,}183 + 0{,}061] = 0{,}022$

ج – المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع :

الوسط الحسابي : $\mu = \lambda = 1$ الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{1} = 1$

ب . إذا تمت التعبئة في صناديق تحمل 100 مصباح و أخذنا أحد هذه الصناديق:

ستتغير قيمة متوسط التوزيع : $\lambda = n \times p = 0{,}01 \times 200 = 2$ دالة التوزيع: $P(X=x) = \dfrac{e^{-2}\,2^X}{X!}$

1. احتمال أن يكون بها ثلاثة مصابيح أو أكثر فاسدة: $P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 3)$

أي: $P(X \ge 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)]$

$$P(X=0) = \frac{e^{-2}\,2^0}{0!} = 0{,}135\ , P(X=1) = \frac{e^{-2}\,2^1}{1!} = 0{,}27\ , P(X=2) = \frac{e^{-2}\,2^2}{2!} = 0{,}27\ , P(X=3) = \frac{e^{-2}\,2^3}{3!} = 0{,}18$$

ومنه: $P(X \ge 3) = 1 - [0{,}135 + 0{,}27 + 0{,}27 + 0{,}18] = 0{,}145$

ج – المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع:

الوسط الحسابي : $\mu = \lambda = 2$ الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1{,}41$