

التمرين الأول:

دالة كثافة الاحتمال للإنتاج اليومي في إحدى الورشات تأخذ الشكل التالي:

$$f(X) = \frac{2-X}{2} \quad 0 < X < 2$$

1 – تأكد من أن الدالة دالة كثافة احتمال.

2 – احسب الاحتمالات التالية: أ. $P(0,5 < X < 1)$ ب. $P(X > 1,5)$ ج. $P(X < 0,3)$

3 – احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للإنتاج.

التمرين الثاني:

المبيعات اليومية لإحدى الشركات تخضع لدالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(X) = C.X(10 - X) \quad 0 < X < 10$$

1 – حدد قيمة الثابت C حتى تكون الدالة تمثل دالة كثافة احتمال.

2 – احسب احتمال أن تتراوح المبيعات بين خمسة وثمانية وحدات مبيعة.

3 – في خلال السنة (366 يوم) احسب عدد الأيام التي يمكن أن تقل فيها المبيعات عن ثلاثة وحدات .

التمرين الثالث:

يتبع المتغير العشوائي (X) الدالة التالية:

$$f(X) = \frac{2}{9}X \quad 0 < X < 3$$

1 – تأكد من أن الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمال.

2 – احسب الاحتمالات التالية: أ. $P(2 < X < 2,5)$ ب. $P(X < 1,5)$ ج. $P(X > 3,5)$

3 – احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للمتغير العشوائي.

التمرين الرابع:

الدالة التالية تابع للمتغير العشوائي (X) :

$$f(X) = \frac{X^2}{30} \quad X : 1,2,3,4$$

1 – تأكد من أن الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمال.

2 – احسب الاحتمالات التالية: أ. $P(X \geq 3)$ ب. $P(X \leq 2)$ ج. $P(X > 2)$

3 – احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للمتغير العشوائي.

حل السلسلة الرابعة

حل التمرين الأول: التوزيعات المستمرة

$$f(X) = \frac{2-X}{2} \quad 0 < X < 2 \quad \text{دالة كثافة الاحتمال للإنتاج:}$$

1- التأكد من أن الدالة دالة كثافة احتمال:

حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمال يجب أن يكون: $\int f(X)dx = 1$

$$\int f(X)dx = \int_0^2 \frac{2-X}{2} dx = \int_0^2 1 - \frac{X}{2} dx = \left[X - \frac{X^2}{4} \right]_0^2 = \left[2 - \frac{4}{4} \right] = 1 \quad \text{أي:}$$

2- حساب الاحتمالات:

$$1 - P(0,5 < X < 1) = \int_{0,5}^1 \frac{2-X}{2} dx = \left[X - \frac{X^2}{4} \right]_{0,5}^1 = \left[1 - \frac{1}{4} \right] - \left[0,5 - \frac{0,25}{4} \right] = \frac{5}{16} = 0,3125$$

$$2 - P(X > 1,5) = \int_{1,5}^2 \frac{2-X}{2} dx = \left[X - \frac{X^2}{4} \right]_{1,5}^2 = \left[2 - \frac{4}{4} \right] - \left[1,5 - \frac{2,25}{4} \right] = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$3 - P(X < 0,3) = \int_0^{0,3} \frac{2-X}{2} dx = \left[X - \frac{X^2}{4} \right]_0^{0,3} = \left[0,3 - \frac{0,09}{4} \right] = 0,2775$$

3- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للإنتاج.

$$1 - \mu(x) = \int X f(X) = \int_0^2 X \left(\frac{2-X}{2} \right) dx = \int_0^2 X - \frac{X^2}{2} dx = \left[\frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{6} \right]_0^2 = \left[2 - \frac{8}{6} \right] = \frac{2}{3}$$

$$2 - V(x) = \int X^2 f(X) - \mu^2 = \int_0^2 X^2 \left(\frac{2-X}{2} \right) dx = \int_0^2 X^2 - \frac{X^3}{2} dx - \mu^2 = \left[\frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{8} \right]_0^2 - \mu^2 = \left[\frac{8}{3} - \frac{16}{8} \right] - \frac{2^2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\sigma_{(X)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

حل التمرين الثاني: التوزيعات المستمرة

$$f(X) = C.X(10-X) \quad 0 < X < 10 \quad \text{دالة كثافة الاحتمال:}$$

1- تحديد قيمة الثابت C حتى تكون الدالة تمثل دالة كثافة احتمال:

حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمال يجب أن يكون: $\int f(X)dx = 1$

$$\int f(X) = \int_0^{10} C.X(10-X) dx = C \int_0^{10} (10X - X^2) dx = C \left[5X^2 - \frac{X^3}{3} \right]_0^{10} = C \left[500 - \frac{1000}{3} \right] = C \left[\frac{500}{3} \right] = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{3}{500} \therefore C = 0,006$$

2 - حساب احتمال أن تتراوح المبيعات بين خمسة وثمانية وحدات مباعه:

$$P(5 < X < 8) = \int_5^8 0,006X(10 - X) dx = 0,006 \int_5^8 (10X - X^2) dx = 0,006 \left[5X^2 - \frac{X^3}{3} \right]_5^8$$

$$= 0,006 \left[\left[5(8)^2 - \frac{(8)^3}{3} \right] - \left[5(5)^2 - \frac{(5)^3}{3} \right] \right] = 0,006(149,33 - 83,33) = 0,396$$

3 - حساب عدد الأيام التي يمكن أن تفل فيها المبيعات عن ثلاثة وحدات في خلال السنة (366 يوم):

$$N = 366 \int_0^3 0,006X(10 - X) dx = 2,196 \int_0^3 (10X - X^2) dx = 2,196 \left[5X^2 - \frac{X^3}{3} \right]_0^3$$

$$= 2,196 \left[5(3)^2 - \frac{(3)^3}{3} \right] = 2,196 \times 36 = 79,056 \approx 79 \text{ jour}$$

حل التمرين الثالث: التوزيعات المستمرة

دالة كثافة الاحتمال: $f(X) = \frac{2}{9}X$ $0 < X < 3$

1 - التأكد من أن الدالة دالة كثافة احتمال:

حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمال يجب أن يكون: $\int f(X)dx = 1$

$$\int f(X) = \int_0^3 \frac{2}{9}X dx = \left[\frac{2}{18}X^2 \right]_0^3 = \left[\frac{1}{9}(3)^2 \right] - \left[\frac{1}{9}(0)^2 \right] = 1 \quad \text{أي:}$$

2 - حساب الاحتمالات:

$$1 - P(2 < X < 2,5) = \int_2^{2,5} \frac{2}{9}X dx = \left[\frac{1}{9}X^2 \right]_2^{2,5} = \left[\frac{1}{9}(2,5)^2 \right] - \left[\frac{1}{9}(2)^2 \right] = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$2 - P(X < 1,5) = \int_0^{1,5} \frac{2}{9}X dx = \left[\frac{1}{9}X^2 \right]_0^{1,5} = \left[\frac{1}{9}(1,5)^2 \right] - \left[\frac{1}{9}(0)^2 \right] = \frac{1}{4} = 0,25$$

3 - $P(X > 3,5) = 0$ أي احتمال خارج مجال تعريف الدالة يساوي الصفر

3 - حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.

$$1 - \mu(x) = \int X f(X) = \int_0^3 X \left(\frac{2}{9} X\right) dx = \int_0^3 \frac{2}{9} X^2 dx = \left[\frac{2}{9 \times 3} X^3 \right]_0^3 = \left[\frac{2}{27} (3)^3 \right] = 2$$

$$2 - V(x) = \int X^2 f(X) - \mu^2 = \int_0^3 X^2 \left(\frac{2}{9} X\right) dx = \int_0^3 \frac{2}{9} X^3 dx - \mu^2 = \left[\frac{2}{9 \times 4} X^4 \right]_0^3 - \mu^2 = \left[\frac{2}{9 \times 4} X^4 \right] - 2^2 = \frac{9}{2} - \frac{8}{2} = \frac{1}{2}$$

$$3 - \sigma_{(X)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$$

حل التمرين الرابع: التوزيعات المستمرة

$$f(X) = \frac{X^2}{30} \quad X: 1, 2, 3, 4 \quad \text{دالة كثافة الاحتمال: } X: 1, 2, 3, 4$$

1 - التأكد من أن الدالة دالة كثافة احتمال:

حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمال يجب أن يكون: $\int f(X) dx = 1$

$$\int f(X) dx = \sum_{i=1}^4 \frac{X^2}{30} = \left[\frac{1^2}{30} + \frac{2^2}{30} + \frac{3^2}{30} + \frac{4^2}{30} \right] = \frac{30}{30} = 1 \quad \text{أي:}$$

2 - حساب الاحتمالات:

$$1 - P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \left[\frac{(3)^2}{30} \right] + \left[\frac{(4)^2}{30} \right] = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} = 0,83$$

$$2 - P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) = \left[\frac{(1)^2}{30} \right] + \left[\frac{(2)^2}{30} \right] = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 0,16$$

$$3 - P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = \left[\frac{(3)^2}{30} \right] + \left[\frac{(4)^2}{30} \right] = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} = 0,83$$

3 - حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.

$$1 - \mu(x) = X \sum_{i=1}^4 \frac{X^2}{30} = \sum_{i=1}^4 \frac{X^3}{30} = \left[\frac{1^3}{30} + \frac{2^3}{30} + \frac{3^3}{30} + \frac{4^3}{30} \right] = \frac{100}{30} = \frac{10}{3} = 3,33$$

$$2 - V(x) = X^2 \sum_{i=1}^4 \frac{X^2}{30} - \mu^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{X^4}{30} - \mu^2 = \left[\frac{1^4}{30} + \frac{2^4}{30} + \frac{3^4}{30} + \frac{4^4}{30} \right] - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{59}{5} - \frac{100}{9} = \frac{31}{45} = 0,688$$

$$3 - \sigma_{(X)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{31}{45}} = 0,829$$