

التمرين الأول:

إذا كان الدخل السنوي للأسرة في أحد المناطق يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ون وتباين 900 ون، المطلوب:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

2 - كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.

3- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60 ون ؟

4- ما هي نسبة الأسر التي يزيد دخلها عن 90 ون ؟

5- ما هو الدخل الذي أقل منه 97,5 % من الدخول؟

التمرين الثاني:

إذا كانت النفقات السنوية لإحدى الشركات تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 100 مليون دينار و انحراف معياري قدره: 5 مليون دينار فأوجد:

1 - احتمال أن تزيد نفقات الشركة عن 107 مليون دينار.

2 - احتمال أن تزيد نفقات الشركة عن 93 مليون دينار.

3 - احتمال أن تقل نفقات الشركة عن 102 مليون دينار.

4 - احتمال أن تقل نفقات الشركة عن 98 مليون دينار.

5- احتمال أن تتراوح بين 101 و 108 مليون دينار.

التمرين الثالث:

درجات طلاب السنة الأولى بكلية الاقتصاد تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $(\mu = 67)$ (من المئة) و تباين قدره $(\sigma^2 = 64)$.

1 - اختيار طالب عشوائياً، ما هو احتمال أن تكون درجاته بين 65 درجة و 75 درجة .

2 - اختيار طالب آخر عشوائياً، ما هو احتمال أن تكون درجاته بين 85 درجة و 90 درجة .

3 - إذا كان عدد الطلاب المسجلين في السنة الأولى بالكلية هو 1200 طالب أوجد عدد الطلاب الذين تزيد درجاتهم عن 60 درجة .

التمرين الرابع:

إذا كانت درجة الحرارة خلال فترة ما من السنة في بلد ما تتبع توزيع طبيعي بمتوسط $(\mu = 20^\circ)$ و انحراف معياري قدره $(\sigma = 3^\circ)$ ، أوجد الاحتمالات التالية:

1 - أن لا تزيد درجة الحرارة عن 30 درجة.

2 - أن تتراوح درجات الحرارة بين 15 و 26 درجة.

3 - أن لا تقل درجات الحرارة عن 30 درجة.

4 - ما هي درجة الحرارة التي تتجاوزها درجة الحرارة باحتمال قدره: 0,937 ؟

حل السلسلة الخامسة

حل التمرين الأول: التوزيع الطبيعي

إذا كان الدخل السنوي للأسرة في أحد المناطق يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ون وتباين 900 ون:
1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي:

المتوسط : $\mu = 80$: التباين : $\sigma^2 = V(X) = 900$ إذن : $X \sim N(80, 900)$

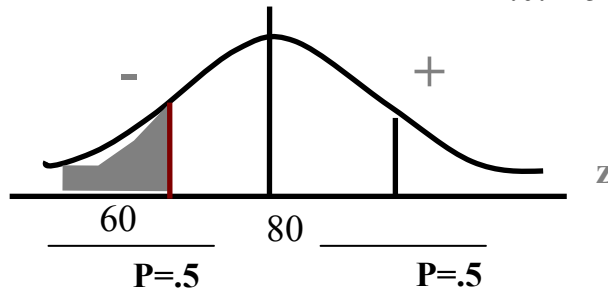
2 - كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال:

$$f(X) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-80}{30}\right)^2}$$

3- نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60 ون:

$$3 - P(X < 60) = P\left(Z < \frac{X - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{60 - 80}{30}\right) = P(Z < -0,66)$$

بما أن القيمة 60 أقل من المتوسط فإن الاحتمال المقابل لها يكون النصف مطروحا منه القيمة المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المساوية إلى 0.2454:

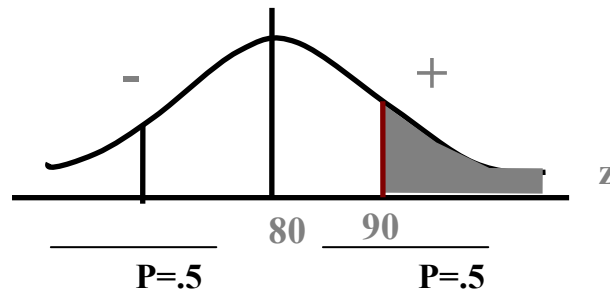


$$P(X < 60) = P\left(Z < \frac{X - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{60 - 80}{30}\right) = P(Z < -0,66) = 0,5 - 0,2454 = 0,2546$$

4- نسبة الأسر التي يزيد دخلها عن 90 ون :

$$P(X > 90) = P\left(Z > \frac{90 - 80}{30}\right) = P(Z > 0,33)$$

بما أن القيمة 90 أكبر من المتوسط فإن الاحتمال المقابل لها يكون النصف مضافا إليه القيمة المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المساوية إلى 0.1293:



$$P(X > 90) = P(Z > 0,33) = 0,5 - 0,1293 = 0,3707$$

5- الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول: نبحث عن المتغير X_1 و الذي يعطينا احتمالا مساوي لـ: 0.975

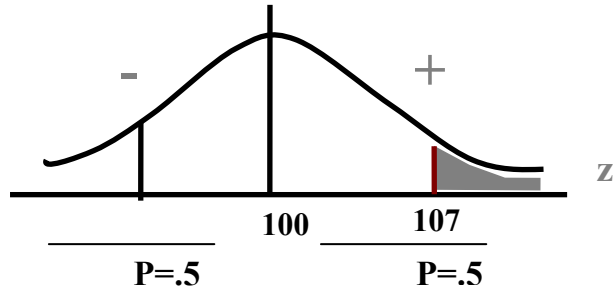
$$\text{أي: } P(X < X_1) = P\left(Z < \frac{X_1 - 80}{30}\right) = 0,975$$

بالرجوع إلى الجدول وبطريقة عكسية سنجد قيمة Z هي $Z=1,96$ ، يمكن إذن أن نجد قيمة X_1 كما يلي :

$$\frac{X_1 - 80}{30} = 1,96 \Rightarrow X_1 = (30 \times 1,96) + 80 = 138,8UM$$

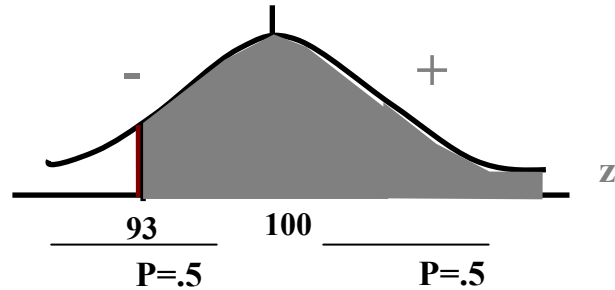
حل التمرين الثاني: التوزيع الطبيعي

توزيع طبيعي بمتوسط 100 مليون دينار و انحراف معياري قدره 5 مليون دينار: $X \sim N(100,25)$
 1 – احتمال أن تزيد نفقات الشركة عن 107 مليون دينار:



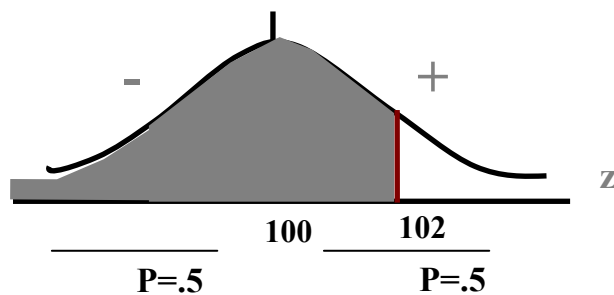
$$P(X > 107) = P(Z > \frac{107 - 100}{5}) = P(Z > 1,4) = 0,5 - 0,4192 = 0,0808$$

2 – احتمال أن تزيد نفقات الشركة عن 93 مليون دينار:



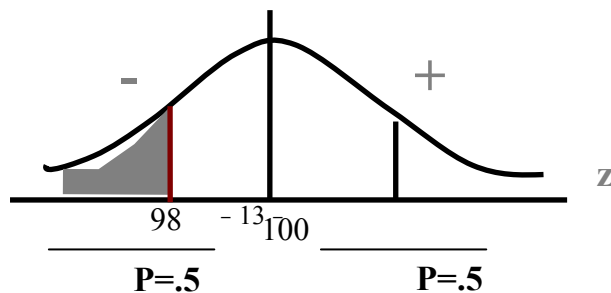
$$P(X > 93) = P(Z > \frac{93 - 100}{5}) = P(Z > -1,4) = 0,5 + 0,4192 = 0,9192$$

3 – احتمال أن تقل نفقات الشركة عن 102 مليون دينار:



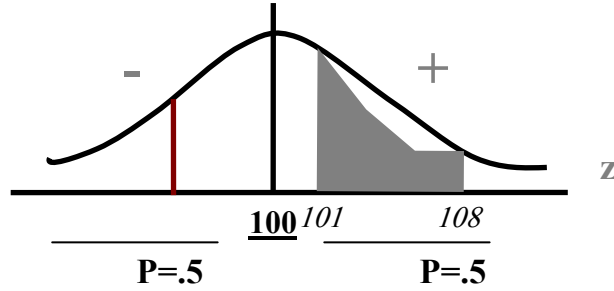
$$P(X < 102) = P(Z < \frac{102 - 100}{5}) = P(Z < 0,4) = 0,5 + 0,1554 = 0,6554$$

4 – احتمال أن تقل نفقات الشركة عن 98 مليون دينار:



$$P(X < 98) = P\left(Z < \frac{98 - 100}{5}\right) = P(Z < -0,4) = 0,5 - 0,1554 = 0,3446$$

5- احتمال أن تتراوح بين 101 و 108 مليون دينار:



$$P(X > 108) = P\left(Z > \frac{108 - 100}{5}\right) = P(Z > 1,6) = 0,5 - 0,4452 = 0,0548$$

$$P(X > 101) = P\left(Z > \frac{101 - 100}{5}\right) = P(Z > 0,2) = 0,5 - 0,0793 = 0,4207$$

$$P(101 < X < 108) = P(X > 101) - P(108 > X) = 0,4207 - 0,0548 = 0,3659$$

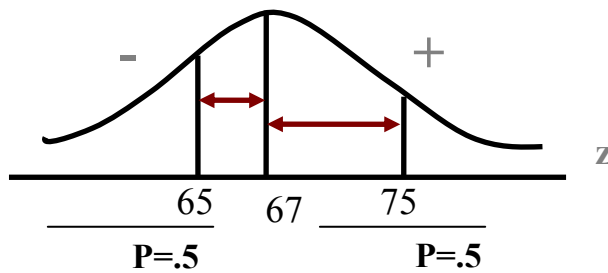
حل التمرين الثالث: التوزيع الطبيعي

المتوسط: $\mu = 67$ التباين: $\sigma^2 = V(X) = 64$ إذن: $X \sim N(67, 64)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 67}{8}$$

1- اختيار طالب عشوائياً، احتمال أن تكون درجاته بين 65 درجة و 75 درجة:

$$\begin{aligned} 1 - P(65 < X < 75) &= P\left(\frac{65 - 67}{8} < Z < \frac{75 - 67}{8}\right) \\ &= P(-0,25 < Z < 1,25) = 0,0987 + 0,3944 = 0,4931 \end{aligned}$$



2- اختيار طالب آخر عشوائياً، احتمال أن تكون درجاته بين 85 درجة و 90 درجة:

$$2 - P(85 < X < 90) = P\left(\frac{85 - 67}{8} < Z < \frac{90 - 67}{8}\right) = P(2,25 < Z < 2,875)$$

$$= P(Z < 2,875) - P(Z > 2,25) = 0,4979 - 0,4878 = 0,0101$$

3- إذا كان عدد الطلاب المسجلين في السنة الأولى بالكلية هو 1200 طالب أوجد عدد الطلاب الذين تزيد درجاتهم عن 60 درجة:

$$3 - P(X > 60) = P(Z > \frac{60-67}{8}) = P(Z > -0,875)$$

$$= 0,3078$$

عدد الطلبة هو : طالب $n = 0,3078 \times 1200 = 369,36 \approx 370$

حل التمرين الرابع: التوزيع الطبيعي

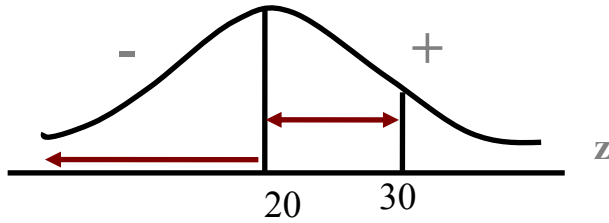
المتوسط : $\mu = 20$ التباين : $\sigma^2 = V(X) = 9$ إذن : $X \sim N(20,9)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 20}{3}$$

التحويل المعيارية:

1- احتمال أن لا تزيد درجة الحرارة عن 30 درجة:

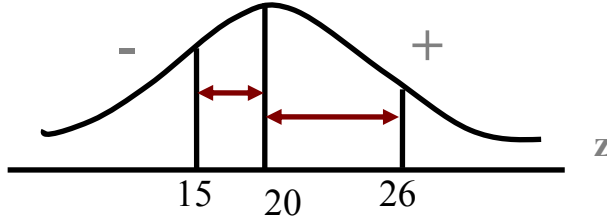
$$1 - P(X < 30) = P(Z < \frac{30-20}{3}) = P(Z < 3,33) = 0,5 + 0,4996 = 0,9996$$



2- احتمال أن تتراوح درجات الحرارة بين 15 و 26 درجة:

$$1 - P(15 < X < 26) = P(\frac{15-20}{3} < Z < \frac{26-20}{3}) = P(-1,66 < Z < 2)$$

$$= P(Z < 2) + P(Z > -1,66) = 0,4772 + 0,4515 = 0,9287$$



3- أن لا تقل درجات الحرارة عن 30 درجة:

$$3 - P(X > 30) = P(Z > \frac{30-20}{3}) = P(Z > 3,33) = 0,5 - 0,4996 = 0,0004$$

$$= 1 - P(Z < 3,33) = 1 - 0,9996 = 0,0004$$

4- درجة الحرارة التي تتجاوزها درجة الحرارة باحتمال قدره: 0,937 هي:

$$P(X > ?) = P(Z > \frac{X-20}{3}) = 0,937 = 0,5 + 0,437$$

$$\Rightarrow Z = 1,53 \Rightarrow \frac{X-20}{3} = 1,53 \Rightarrow X = (3 \times 1,53) + 20 = 24,59$$

درجة الحرارة التي تتجاوزها درجة الحرارة باحتمال قدره: 0,937 هي 24,59 درجة مئوية.