

الأستاذة /لونيبي نبيلة

المقياس: رياضيات 2

تابع محاضرة المصفوفات

مقلوب مصفوفة

تعريف 1: نقول ان مصفوفة A قابلة انها ذا وجدت مصفوفة

B بحيث

$$A \cdot B = I_n$$

I_n المصفوفة الواحدية

اذن:

$$A^{-1} = B$$

تعريف 2

نقول ان مصفوفة انها قابلة للقلب اذا

محدد لها لا يساوي الصفر

إيجاد مقلوب مصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{ct}{\det A}$$

C تسمى المصفوفة المرافقة للمصفوفة

A

C^t تسمى منقول المصفوفة المرافقة

تحسب بالطريقة التالية:

$$C = (-1)^{i+j} \det A_{i+j}$$

A_{i+j} هي المصفوفة A بحذف العمود و السطر i

مثال: لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

اذن $\det A = -36$

المصفوفة قابلة للقلب

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

تحسب كمايلي:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 15 = -11$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 0) = -8$$

$$C_{13} = +10 ; C_{21} = -13 ; C_{22} = +0 ; C_{23} = 0 ; C_{31} = +7 ; C_{32} = -2 ; C_{33} = -4$$

$$A^{-1} = \frac{C^t}{\det A}; C^t = \begin{pmatrix} -11 & -13 & 7 \\ -8 & 0 & -2 \\ 10 & 0 & -4 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -11 & -8 & 10 \\ -13 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{-36} & \frac{-13}{-36} & \frac{7}{-36} \\ \frac{-8}{-36} & \frac{0}{-36} & \frac{-2}{-36} \\ \frac{10}{-36} & \frac{0}{-36} & \frac{-4}{-36} \end{pmatrix}$$

حل جمل المعادلات الخطية: حل جملة معادلة خطية من الشكل:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

تكتب من الشكل :

$$A \cdot x = b$$

$$A \in M(3,3) ; b \in R^3 ; x \in R^3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} / x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

1- طريقة كرامر : اذا كان محدد المصفوفة لا يساوي الصفر فان الجملة لها حل وحيد تعطى مركبات الشعاع x بالعلاقة التالية:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \text{ حيث المصفوفة}$$

A_i هي المصفوفة

A بحذف العمود

انعوضه بالشعاع

b

مثال: حل الجملة الخطية

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 3 \end{cases}$$

$$;b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ;x = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

لدينا:

$$|A| = \det A = 1 \neq 0$$

اذن المصفوفة قابلة للقلب أي الجملة لها حل وحيد حسب كرامر

$$لدينا X_1 = \frac{|A_1|}{\det A} ; X_2 = \frac{|A_2|}{\det A} ; X_3 = \frac{|A_3|}{\det A}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1 ; X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1 ; X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 2$$