Advanced Time Series Analysis

الفصل الثاني: النماذج الخطية للسلاسل الزمنية

Time Series Linear Models

الدرس 06

6th Course

المبحث 02: تقدير التأثيرات الموسمية والدورية

1- تقدير التأثيرات الموسمية للنماذج التجميعية
2- تقدير التأثيرات الموسمية للنماذج الضربية
3- تقدير التأثيرات الدورية.

المبحث 02: تقدير التأثيرات الموسمية والدورية

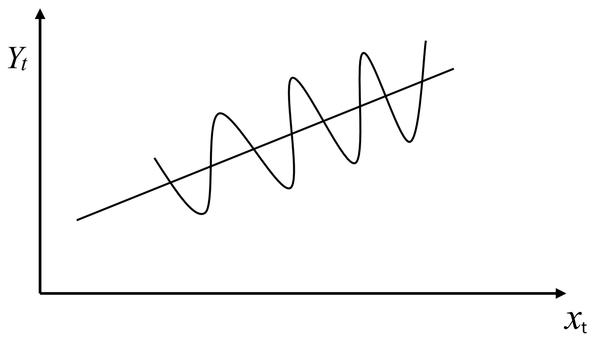
تتأثر عمليات التنبؤ باستخدام أي الطرق المذكورة آنفا بالتأثيرات الفصلية و/أو التأثيرات الدورية، وذلك يتوقف على المدى الزمني وطول السلسلة الزمنية، وسوف يتم التطرق في هذا المحور من الدراسة إلى تأثيرات العوامل الموسمية والدورية على عملية التنبؤ.

1- تقدير التأثيرات الموسمية (الفصلية) على التنبؤ:

إذا كانت الوحدات الزمنية للسلسلة هي يوم، أسبوع أو شهر وعلى المدى القصير، قد تظهر تأثيرات العامل الموسمي، مما ينعكس سلبا على القيم المتنبأ بها، وهو ما يتطلب عزل تأثيرات العامل الموسمي لتصبح سلسلة زمنية معدلة (*Adjusted Time Serie*)، وسيتم في هذه الفقرة تقدير التغيرات الموسمية للنموذجين الجمعي والضربي، رغم أن الأخير هو الأكثر مواءمة مع الظواهر الاقتصادية الحديثة.

أ- تقدير التأثيرات الموسمية للنماذج التجميعية:

يفترض هذا النموذج كما تم ذكره سابق أن قيمة الظاهرة هي حاصل جمع المركبات الأربعة التي تتكون منها السلسلة، وأن هذه المركبات مستقلة عن بعضها البعض، ويكون هذا النموذج مناسبا إذا كانت التأرجحات الموسمية (Seasonal Swings) مستقلة عن الاتجاه العام للسلسلة الزمنية كما هو مبين في الشكل التالي:



الشكل 14: تذبذبات موسمية متساوية

يتبين من الشكل أعلاه أن التغيرات الموسمية ممثلة بالتذبذبات الحاصلة أعلى وتحت خط الاتجاه العام متساوية تقريبا، هنا يكون من الأفضل استخدام النموذج التجميعي في تقدير التأثيرات الموسمية وذلك بتتبع الخطوات التالية:

- إيجاد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية؛
- حساب القيم الاتجاهية للسلسلة الفعلية$\hat{Y}t$؛
- حساب نسبة تغير القيم الفعلية عن القيم التنبؤية لكل موسم: $\frac{Yt-\hat{Y}t}{\hat{Y}t}$؛
- حساب متوسط التغيرات الموسمية Mi، حيث i= 1، 2 ،3، 4؛
- حساب المؤشر الموسمي $Si = (1 - Mi)$؛

- تقدير القيم الاتجاهية الخالية من تأثيرات العامل الموسمي، $Ye = Si.\hat{Y}t$.

مثال توضيحي: طلبت مؤسسة ما التنبؤ بمبيعاتها للمواسم الأربعة لسنة 2020، وقدمت لك البيانات المبينة في الجدول التالي والتي تعكس تطور مبيعاتها خلال 3 سنوات الأخيرة:

الجدول 10: تطور مبيعات مؤسسة ما للفترة: 2017–2019

$\frac{Yt-\hat{Y}t}{\hat{Y}t}$	$\hat{Y}t$	المبيعات Yt (وحدة)	الموسم	السنة
-0.0914	110.06	100	1	2017
0.0507	114.20	120	2	
-0.0704	118.34	110	3	
0.1022	122.48	135	4	
-0.0128	126.62	125	1	2018
0.0079	130.76	136	2	
0.0229	134.90	138	3	
0.0069	139.04	140	4	
-0.0082	143.18	142	1	2019
-0.0225	147.32	144	2	
-0.0096	151.46	150	3	
-0.0108	155.60	154	4	

لإيجاد القيم التنبؤية للمواسم الأربعة لسنة 2020 والخالية من التأثيرات الموسمية نقوم بالخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى:** إيجاد معادلة الاتجاه العام لسلسلة المبيعات، أي:

$$\hat{Y}t = 105.92 + 4.14T$$

- **الخطوة الثانية:** حساب القيم الاتجاهية للسلسلة $\hat{Y}t$ (أنظر الجدول 10).
- **الخطوة الثالثة:** حساب نسبة تغير القيم الفعلية عن القيم التنبؤية لكل موسم: $\frac{Yt-\hat{Y}t}{\hat{Y}t}$(أنظر الجدول 10).
- **الخطوة الرابعة:** حساب متوسط التغيرات الموسمية Mi كما يلي:

الموسم 01: $M1=((-0.0914)+(-0.0128)+(-0.0082))/3= -0.0374$

الموسم 02: $M2 =((0.0507)+(0.0079)+(0.0225))/3= 0.0274$

الموسم 03: $M3 =((-0.0704)+(0.0229)+(-0.0096))/3=-0.0190$

الموسم 04: $M4 =((0.1022)+(0.0069)+(-0.0108))/3= 0.0327$

- **الخطوة الخامسة:** حساب المؤشر الموسمي $Si = (1 - Mi)$:

الموسم 01: $S1 =(1-(-0.0374)) = 1.0374$

الموسم 02: $S2 = (1- 0.0274) = 0.9726$

الموسم 03: $S3 = (1-(- 0.0190))=1.0190$

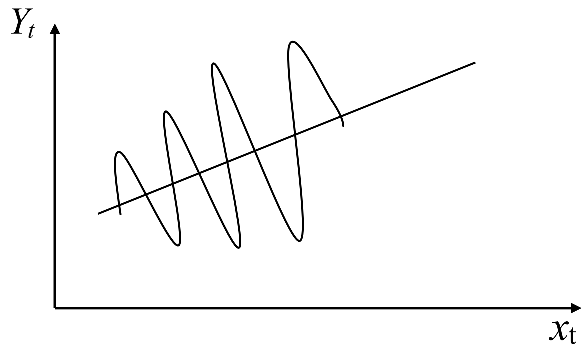
الموسم 04: $S4 = (1- 0.0327) = 0.9673$

- **الخطوة السادسة:** القيم التنبؤية (المبيعات التقديرية) للمواسم الأربعة لسنة 2020 مبينة في الجدول التالي:

Ye	Si	$\hat{Y}t$	الموسم	السنة
165.71	1.0374	159.74	1	2020
159.39	0.9726	163.88	2	
171.21	1.0190	168.02	3	
166.53	0.9673	172.16	4	

ب –تقدير التأثيرات الموسمية للنماذج الضربية:

يعتبر هذا النموذج الأكثر شيوعا واستخداما بالنسبة للظواهر الحديثة، خاصة الاقتصادية، ويعتبر أن قيمة الظاهرة Yt هي حاصل ضرب المركبات الأربعة خلال الزمن t، وأن هذه المركبات مستقلة عن بعضها البعض، ويكون هذا النموذج مناسبا إذا كانت التأرجحات الموسمية (*Seasonal Swings*) متناسبة مع مستوى الاتجاه العام للسلسلة الزمنية كما هو مبين في الشكل التالي:



الشكل 15: تذبذبات موسمية غير متساوية

يتبين من الشكل أعلاه أن التغيرات الموسمية ممثلة بالتذبذبات الحاصلة أعلى وتحت خط الاتجاه العام، وهي غير متساوية، وفي هذه الحالة يفضل استخدام النموذج الضربي في تقدير التأثيرات الموسمية وذلك بتتبع الخطوات التالية:

- إيجاد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية؛
- حساب القيم الاتجاهية للسلسلة الزمنية$\hat{Y}t$؛
- حساب نسبة القيم الفعلية إلى القيم التنبؤية لكل موسم: $\frac{Yt}{\hat{Y}t}$؛
- حساب متوسط التغيرات الموسمية Mi، حيث i= 1، 2 ،3، 4؛
- حساب المؤشر الموسمي $Si = \frac{Mi}{\Sigma Mi}$؛
- تقدير القيم الاتجاهية الخالية من تأثيرات العامل الموسمي، $Ye = Si.\hat{Y}t$.

مثال توضيحي: لنأخذ معطيات المثال السابق لإيجاد المبيعات التقديرية للمؤسسة للمواسم الأربعة لسنة 2020 والخالية من تأثيرات العامل الموسمي، وبتطبيق الخطوات المذكورة سابقا:

- **الخطوة الأولى:** إيجاد معادلة الاتجاه العام لسلسلة المبيعات، أي:

$$\hat{Y}t = 105.92 + 4.14Xt$$

- **الخطوة الثانية:** حساب القيم الاتجاهية للسلسلة الفعلية$\hat{Y}t$ (أنظر الجدول 11).

الجدول 11: تطور مبيعات مؤسسة ما للفترة: 2017–2019

السنة	الموسم	المبيعات Yt (وحدة)	$\hat{Y}t$	$\frac{Yt}{\hat{Y}t}$
2017	1	100	110.06	0.9086
	2	120	114.20	1.0508
	3	110	118.34	0.9295
	4	135	122.48	1.1022
2018	1	125	126.62	0.9872
	2	136	130.76	1.0400
	3	138	134.90	1.0230
	4	140	139.04	1.0069
2019	1	142	143.18	0.9917
	2	144	147.32	0.9774
	3	150	151.46	0.9903
	4	154	155.60	0.9897

- **الخطوة الثالثة:** حساب نسبة القيم الفعلية إلى القيم التنبؤية لكل موسم: $\frac{Yt}{\hat{Y}t}$ (أنظر الجدول 11).
- **الخطوة الرابعة:** حساب متوسط التغيرات الموسمية Mi كما يلي:

الموسم 01: $M1=((0.9086)+(0.9872)+(0.9917))/3= 0.9625$

الموسم 02: $M2 =((1.0508)+(1.0400)+(0.9774))/3= 1.0227$

الموسم 03: $M3 =((0.9295)+(1.0230)+(0.9903))/3= 0.9809$

الموسم 04: $M4 =((1.1022)+(1.0069)+(0.9897))/3= 1.0329$

- **الخطوة الخامسة:** حساب المؤشر الموسمي Si:

$$\sum_{i=1}^{4} Mi = (0.9625 +1.0227+0.9809+1.0329) = 3.999$$

$$Ma =3.999/4 = 0.9997$$

الموسم 01: $S1 =0.9625/0.9997 = 0.9627$

الموسم 02: $S2 =1.0227/0.9997 = 1.0230$

الموسم 03: $S3 = 0.9809/0.9997 = 0.9812$

الموسم 04: $S4 = 1.0329/0.9997 = 1.0332$

- **الخطوة السادسة:** القيم التنبؤية (المبيعات التقديرية) للمواسم الأربعة لسنة 2020 مبينة في الجدول التالي:

Ye	Si	$\hat{Y}t$	الموسم	السنة
153.78	0.9627	159.74	1	
167.65	1.0230	163.88	2	2020
164.86	0.9812	168.02	3	
177.87	1.0332	172.16	4	

2- تقدير التأثيرات الدورية *Cyclical Effects* على التنبؤ:

السلاسل الزمنية متوسطة أو طويلة المدى قد تنتابها تذبذبات تتكرر العديد من المرات على طول السلسلة، وهي عبارة عن دورات تتكرر فوق وتحت الاتجاه العام تشبه منحنيات الجيب أوالجيب التمام، لكن تكون بأطوال وسعات مختلفة، ولهذا وجب إيجاد طريقة لتقديرها حتى لا تأثر على عملية التنبؤ، وتوجد العديد من الطرق لعزل تأثيرات العامل الدوري، وسنركز في هذا المؤلف على طريقة البواقي، والتي تتناسب والنموذج الضربي، وتعتمد الخطوات التالية عادة في عزل التأثيرات الدورية من القيم التنبؤية للسلسلة:

- حساب القيم التنبؤية $\hat{Y}t$ باستخدام معادلة الاتجاه العام؛
- استبعاد أثر الاتجاه العام من السلسلة $\frac{Yt}{\hat{Y}t}$؛
- استبعاد أثر العامل الموسمي من السلسلة $(\frac{Yt}{\hat{Y}t})/Si$؛
- استبعاد التأثيرات العرضية باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة *MA*؛
- استبعاد تأثيرات الدورية يكون بضرب متوسط قيم المتوسط المتحرك للسلسلة في القيمة التنبؤية $\hat{Y}t\,.\,\overline{\mathrm{MA}}$.

مثال توضيحي: لنأخذ معطيات المثال السابق والخاص بمبيعات المؤسسة، كما مبين في الجدول التالي:

الجدول 12: تطور مبيعات مؤسسة ما للفترة: 2017-2019

$\overline{\mathrm{MA}}$	المتوسط المتحرك *MA*	$(\frac{Yt}{\hat{Y}t})/Si$	$\frac{Yt}{\hat{Y}t}$	$\hat{Y}t$	المبيعات *Yt* (وحدة)	الموسم	السنة
	-	0.9438	0.9086	110.06	100	1	
	0.9720	1.0271	1.0508	114.20	120	2	2017
0.9990	1.0122	0.9473	0.9295	118.34	110	3	
	1.0129	1.0667	1.1022	122.48	135	4	
	1.0362	1.0254	0.9872	126.62	125	1	
1.0314	1.0282	1.0166	1.0400	130.76	136	2	2018
	1.0284	1.0426	1.0230	134.90	138	3	
	1.0329	1.0262	1.0069	139.04	140	4	
	1.0039	1.0301	0.9917	143.18	142	1	
0.9920	0.9982	0.9554	0.9774	147.32	144	2	2019
	0.9741	1.0092	0.9903	151.46	150	3	
	-	0.9579	0.9897	155.60	154	4	

للتنبؤ بمبيعات المؤسسة للمواسم الأربعة لسنة 2020 مع عزل تأثيرات الموسمية والدورية نقوم بالخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى:** حساب القيم التنبؤية $\hat{Y}t$ باستخدام معادلة الاتجاه العام (أنظر الجدول 12).
- **الخطوة الثانية:** استبعاد أثر الاتجاه العام من السلسلة $\frac{Yt}{\hat{Y}t}$ (أنظر العمود 5 – الجدول 12).
- **الخطوة الثالثة:** استبعاد أثر العامل الموسمي من السلسلة $(\frac{Yt}{\hat{Y}t})/Si$ (أنظر العمود 6)
- **الخطوة الرابعة:** استبعاد التأثيرات العرضية باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة *MA* (العمود 7).
- **الخطوة الخامسة:** استبعاد تأثيرات الدورية يكون بضرب متوسط قيم المتوسط المتحرك للسلسلة في القيمة التنبؤية $\hat{Y}t\,.\,\overline{\text{MA}} = 1.0074$

السنة	الموسم	$\hat{Y}t$	Ye
	1	159.74	160.92
2020	2	163.88	165.09
	3	168.02	169.26
	4	172.16	173.43

القيم التنبؤية Ye هي قيم المبيعات التقديرية والخالية من تأثيرات مركبات السلسلة الزمنية، والملاحظ على القيم Ye متقاربة وتأخذ نفس اتجاه القيم الاتجاهية $\hat{Y}t$.

Advanced Time Series Analysis

الفصل الثاني: نماذج السلاسل الزمنية الخطية

الدرس 07

7th Course

المبحث 03: اختبار معنوية نماذج التنبؤ (اختبارات الدرجة الأولى)

1- الارتباط.
2- اختبار معنوية معلمات النموذج (*t –Student*).
3- اختبار المعنوية الكلية (*F- test*).
4- اختبار الارتباط الذاتي (*DW*).

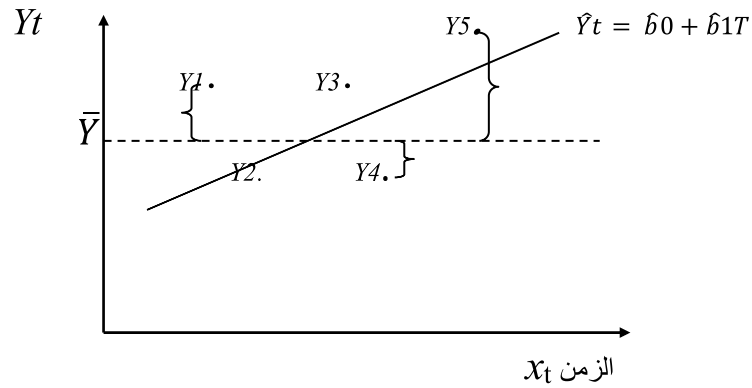
المبحث 03: اختبار معنوية نماذج التنبؤ (اختبارات الدرجة الأولى):

للتأكد من دقة وصلاحية نموذج التنبؤ المستخدم، ممثل بمعادلة خطية أو غير خطية بسيطة أو متعددة، تختبر المعنوية الإحصائية، بإجراء سلسلة من اختبارات الدرجة الأولى، ممثلة في الارتباط، دراسة معنوية المعالم، المعنوية الكلية والتأكد من خلو النموذج من الارتباط الذاتي للبواقي. .

1 − الارتباط *Correlation*

إن دراسة قوة العلاقة بين قيم السلسلة Yt و قيم عامل الزمن x_t تعطي فكرة على مدى ترابط المتغيرين مع بعضهما البعض، مهما كان شكل المعادلة خطي أو غير خطي، وتبنى دراسة قوة العلاقة من دراسة انحرافات القيم الفعلية للسلسلة الزمنية عن المتوسط الحسابي، أي:

$$\Sigma(Yt - \bar{Y})$$



من الشكل أعلاه يلاحظ أن انحراف Y_5 على سبيل المثال يساوي إلى:

$$(Y5 - \bar{Y}) = (Y5 - \hat{Y}5) + (\hat{Y}5 - \bar{Y})$$

وبتعميم هذه القاعدة على جميع قيم السلسلة نجد أن مربع مجموع انحرافات قيم Yt عن المتوسط الحسابي تساوي:

$$\Sigma(Yt - \bar{Y})^2 = \Sigma(Yt - \hat{Y})^2 + \Sigma(\hat{Y}t - \bar{Y})^2$$

وبتقسيم طرفي المعادلة عن $\Sigma(Yt - \bar{Y})^2$ نجد:

$$1 = \frac{\Sigma(Yt - \hat{Y})^2}{\Sigma(Yt - \bar{Y})^2} + \frac{\Sigma(\hat{Y}t - \bar{Y})^2}{\Sigma(Yt - \bar{Y})^2}$$

أي:

$$1 = USS \quad + \quad ESS$$

USS: مجموع مربعات الانحرافات الغير مفسرة بالنموذج المستخدم.

ESS: مجموع مربعات الانحرافات المفسرة بالنموذج.

ومنه يحسب **معامل التحديد** R^2 كالتالي:

$$1 = \frac{\Sigma(Yt - \hat{Y})^2}{\Sigma(Yt - \bar{Y})^2} + R^2$$

أي أن:

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma et^2}{\Sigma(Yt - \bar{Y})^2}$$

حيث: $0 \le R^2 \le 1$، كلما اقترب معامل التحديد من 1 كلما كانت العلاقة بين Yt والزمن x_t أقوى، وكان النموذج أكثر صلاحية للتنبؤ. كما يمكن استخدام معامل الارتباط r كبديل لمعامل التحديد، أي:

$$r = \sqrt{1 - \frac{\Sigma et^2}{\Sigma(Yt - \bar{Y})^2}}$$

أو

$$r = \frac{\Sigma yt.xt}{nSx.Sy}$$

حيث: $-1 \le r \le +1$، S_T الانحراف المعياري للزمن وS_y الانحراف المعياري لقيمة السلسلة والقيمتين: yt وXt هما القيمتين المركزتين حول الوسط الحسابي، كما أن:

$$ST = \sqrt{\frac{\Sigma Xt^2}{n}} \qquad Sy = \sqrt{\frac{\Sigma yt^2}{n}}$$

وكخطوة أخيرة تتم دراسة المعنوية الإحصائية لمعامل الارتباط r باستخدام توزيع العينة T، عند $n\text{-}k$ درجات حرية ومستوى معنوية α% حيث:

$$T_{CAL} = \frac{r\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-r^2}}$$

إذا كانت $|T_{CAL}|$ أكبر من الجدولية T^{α}_{n-k}، يتم قبول معنوية معامل الارتباط r باحتمال قدره: $(1-\alpha)$%.

2- دراسة معنوية معلمات النموذج

بعد التأكد من معنوية معامل الارتباط يتم اختبار المعنوية الإحصائية للمتغيرات التفسيرية للنموذج باستخدام توزيع T، حيث تختبر معنوية معلمات النموذج والمرتبطة بالمتغيرات التفسيرية أي:

$$\begin{cases} H_O: b_i = 0 \\ H_1: b_i \neq 0 \end{cases}$$

حيث تكون:

$$T_{CAL} = \frac{\hat{b_i} - b_i}{S_{\hat{b_i}}}$$

إذا كانت $|T_{CAL}|$ أكبر من الجدولية $T^{\alpha/2}_{n-k-1}$، تقبل الفرضية البديلة H_1 أن $b_i \neq 0$ بمستوى معنوية α وبـ $n-k-1$ درجات حرية، وهو ما يدل على أن النموذج صالح لتنبؤ وذو دلالة إحصائية.

3- إخبار المعنوية الكلية للنموذج

يستخدم عادة في اختبار المعنوية الكلية للنموذج إحصائية فيشر (*F- test*) والتي تختبر معنوية معالم المتغيرات المستقلة مجتمعة، حيث يرتكز هذا الاختبار على الفروض التالية:

$$\begin{cases} H_O: b_i = 0 \\ H_1: b_i \neq 0 \end{cases}$$

يتم حساب قيمة F بالعديد من الصيغ، وسنركز في هذه الدراسة على الصيغ التالية:

$$F_{(k,\ n-k-1)} = (R^2/k) / ((1-R^2)/(n-k-1))$$

حيث: k عدد المتغيرات المفسرة في النموذج.

إذا تم حساب قيمة F (F_{CAL}) ووجدت قيمتها أكبر من القيمة الجدولية لـ F وبـ $(k,\ n-k-1)$ درجات حرية وبمستوى معنوية α، يتم قبول الفرضية البديلة H_1، أن $b_i \neq 0$ وأنه يوجد على الأقل متغير مستقل واحد يؤثر على قيمة السلسلة الزمنية Yt.

4- اختبار الارتباط الذاتي للبواقي *Autocorrelation Test*

تفترض عادة طريقة المربعات الصغرى انعدام الارتباط الذاتي بين الأخطاء، أي أن: $E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0$، إذا كانت $t \neq t'$ الأخطاء غير مرتبطة، لذا وجب إجراء اختبار التحقق من وجود ارتباط ذاتي من عدمه بين الأخطاء ومن بين الاختبارات الأكثر شيوعا اختبار *Durbin – Watson*، والذي يقوم على أن:

$$e_t = \rho\, e_{t-1} + u_t$$

حيث e_t الخطأ المقدر للنموذج و u_t الضجيج الأبيض *(White Noise)*.

وتبنى الفروض على النحو التالي:

$$\begin{cases} H_O: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases}$$

وتعرف إحصائية $D.W$ بالصيغة التالية:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

حيث: $0 \leq d \leq 4$ والجدول التالي يلخص مجالات القبول ورفض الفروض والمتعلقة بوجود ارتباط ذاتي من عدمه.

الجدول 13: مجالات قبول ورفض الارتباط الذاتي

	0	d_L	d_U 2	4-du	$4\text{-}d_L$ 4
DW	H_1	-	H_0	-	H_1
Analysis	$\rho > 0$ ارتباط ذاتي موجب Positive Autocorrelation	عدم اليقين Undetermined	$\rho = 0$ Valid null hypothesis	عدم اليقين Undetermined	$\rho < 0$ ارتباط ذاتي سالب Negative Autocorrelation

يتم حساب قيمة d بالعلاقة المذكورة أعلاه، ثم يتم البحث إلى أي مجال تنتمي القيمة المتحصل عليها من خلال جدول إحصائية DW عند k درجة حرية و n طول السلسلة، فإذا وجدت:

- $du \leq d \leq 4 - du$ يتم قبول فرضية العدم (H_0) أي أن: $\rho = 0$ ويعتبر النموذج خالي من الارتباط الذاتي؛
- $0 \leq d \leq dL$ يتم قبول الفرضية البديلة (H_1) أي أن: $\rho > 0$ ويعتبر النموذج ذو ارتباط ذاتي موجب، وأنه غير معنوي وغير صالح للتنبؤ؛
- $4\text{-}dL \leq d \leq 4$ يتم قبول الفرضية البديلة (H_1) أي أن: $\rho < 0$ ويعتبر النموذج ذو ارتباط ذاتي سالب، وأنه غير معنوي وغير صالح للتنبؤ.

مثال توضيحي: خذ معطيات المثال السابق، ثم اختبر معنوية نموذج التنبؤ المتوصل إليه.

1- حساب معامل التحديد R^2 ومعامل الارتباط r لاختبار قوة الارتباط بين الزمن t وسلسلة المبيعات Yt:

الجدول 14: خطوات حساب مؤشرات المعنوية الإحصائية

$(e_t - e_{t-1})^2$	e_{t-1}	$(xt-\bar{x})^2$	$(Yt-\bar{Y})^2$	$e_t^2 = (Yt\text{-}\hat{Y}t)^2$	$e_t = (Yt\text{-}\hat{Y}t)$	$\hat{Y}t$	المبيعات Yt (وحدة)	الزمن xt	الموسم	السنة
-	-	30.25	1133.00	101.20	-10.06	110.06	100	1	1	2017
18.14	10.06	20.25	177.68	33.64	5.80	114.20	120	2	2	
199.94	5.80	12.25	1133.00	69.55	- 8.34	118.34	110	3	3	
435.14	-8.34	6.25	2.75	156.75	12.52	122.48	135	4	4	
199.94	12.52	2.25	75.00	2.62	-1.62	126.62	125	5	1	2018
47.06	-1.62	0.25	5.42	27.45	5.24	130.76	136	6	2	
4.58	5.24	0.25	18.75	9.61	3.10	134.90	138	7	3	
4.58	3.10	2.25	44.35	0.92	0.96	139.04	140	8	4	
4.58	0.96	6.25	75.00	1.39	-1.18	143.18	142	9	1	2019
2.25	-1.18	12.25	106.71	7.18	-2.68	147.32	144	10	2	
1.49	-2.68	20.25	267.00	2.13	-1.46	151.46	150	11	3	
0.02	-1.46	30.25	413.71	2.56	-1.60	155.60	154	12	4	
917.72		**143.00**	**3426.66**	**415.00**						

ومنه **معامل التحديد** يساوي:

$$R^2= 1-\frac{415}{3426.66}= 0.87$$

كما أن معامل الارتباط r = 0.93، وهو ما يعكس العلاقة الإيجابية القوية بين سلسلة المبيعات Yt وعامل الزمن t.

2– اختبار المعنوية المعلمات $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$:

$$S_{\widehat{b_1}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} {e_t}^2/n-2}{\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})2}}$$

$$S_{\widehat{b_0}} = \sqrt{\sum_{t=1}^{n}\frac{{e_t}^2}{n-2}(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{t=1}^{n}(x_t-\overline{x})^2})}$$

ويتم حساب قيمة t للمعلمتين كالتالي:

$$t_{\widehat{b_0}} = \frac{105-b_0}{S_{\widehat{b_0}}} = \frac{105}{3.965} = 26.48$$

$$t_{\widehat{b_1}} = \frac{4.14-b_1}{S_{\widehat{b_1}}} = \frac{4.14}{0.538} = 7.69$$

القيمة الجدولية لـ t $(T^{\alpha/2=0.025}_{n-2=10})$ تساوي 2.228، وحيث أن القيمتين المحسوبتين أكبر تماما من القيمة الجدولية، يتم قبول الفرضية البديلة أن b_0 وb_1 يختلفان عن 0 وأن المعلمتين لهما معنوية إحصائية بمستوى ثقة 95% ، وهو ما يؤكد صلاحية النموذج مرة أخرى للتنبؤ.

ويتم ذلك بحساب قيمة إحصائية فيشر F كما ذكرنا سابقا،

$$F_{1,\,10}= (0.87) /((0.13)/(10))= \mathbf{66.92}$$

وحيث أن القيمة الجدولية وبمستوى معنوية 5%: F_{Tab}= **4.96**، وما دامت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية، يتم قبول الفرضية البديلة أنه يوجد تأثير للعامل الزمني على قيمة السلسلة Yt، وهو ما يثبت صلاحية النموذج المتوصل للتنبؤ.

4– اختبار الارتباط الذاتي للبواقي:

يستخدم كما ذكرنا سابق اختبار *DW* للتأكد من خلو النموذج من الارتباط الذاتي للأخطاء أو البواقي، أي: (أنظر الجدول 14)

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} {e_t}^2} = \frac{917.72}{415} = \mathbf{2.21}$$

ولمعرفة ما إذا كان هناك ارتباط ذاتي للبواقي عند $k=1$ و $n=10$ نحصل من الجدول على القيمتين: $d_L = 0.697$ و $d_U = 1.023$ وحتى تقبل فرضية العدم H_o لابد أن يتحقق الآتي:

$$du = 1.023 < d = 2.21 < 4 - du = 2.977$$

الشرط محقق، وبالتالي نقبل بفرضية العدم (H_o) أي: $\rho = 0$ ، يكون النموذج خالي من الارتباط الذاتي,

ملاحظة: بما أن كل اختبارات المعنوية كانت إيجابية، فإنه يمكن القول أن النموذج المستخدم في مثالنا صالح للتنبؤ، وأن القيم التنبؤية المتوصل إليها سابقا ذات معنوية إحصائية.

Advanced Time Series Analysis

الفصل الثالث: إستقرارية السلاسل الزمنية وتقدير دالة الارتباط الذاتي

الدرس 08

8th Course

المبحث 01: إستقرارية السلاسل الزمنية

1- السلاسل الزمنية تامة الإستقرارية *Strict Stationarity*

2- السلاسل الزمنية ضعيفة الإستقرارية *Weak Stationarity*

المبحث الأول: إستقرارية السلاسل الزمنية *Time Series Stationary*

تقديم نظرة دقيقة وشاملة لمفهوم الإستقرارية وأنواعها المختلفة المحددة في الأدبيات الأكاديمية التي تتناول تحليل السلاسل الزمنية ضروري للغوص في تحليل مختلف الطرق المساعدة على تحويل السلاسل الزمنية غير المستقرة إلى سلاسل مستقرة.

وتعتبر الإستقرارية ذات أهمية قصوى في تحليل السلاسل الزمنية لعديد الأسباب يذكر منها:

- السلاسل المستقرة سهلة التحليل وتساعد على التنبؤ، رغم أنها تتعلق بسلوكيات متغيرات عشوائية عبر الزمن؛
- تساعد على تبسيط وفهم السلاسل المركبة والمعقدة، وذلك من خلال التمكين من إعطاء تفسيرات تقريبية لها؛
- إستقرارية السلاسل تساعد على اختيار النماذج والأدوات الإحصائية الملائمة لتحليلها وتفسير السلوك العشوائي للظواهر والتنبؤ به بشيء من الموثوقية.

والإستقرارية تعني عدم تأثر الخصائص الإحصائية للسلسلة (التوقع، التباين، التغاير) بطول السلسلة أو عمليات الإزاحة إلى الأمام أو إلى الخلف عبر الزمن، كما يمكن وصف الخصائص الإحصائية بدالة الاحتمال التراكمي، ويميز الإحصائيون بين نوعين من الإستقرارية هما: الإستقرارية التامة والإستقرارية الضعيفة.

1- الإستقرارية التامة: *Strict Stationarity*

تكون السلسلة الزمنية (Y_t) أو العملية العشوائية تامة السكون إذا كان التوزيع الاحتمالي التراكمي المشترك لأي مجموعة جزئية تتكون منها السلسلة الزمنية لا يتأثر بعملية الإزاحة إلى الأمام أو الخلف أي عدد من الوحدات الزمنية، فإذا افترضنا أن ($t_1, t_2, \ldots, t_n$) هي مجموعة جزئية من الزمن، وكانت الإزاحة: $K = \pm 1, \pm 2, \ldots$ تكون السلسلة (Y_t) تامة السكون إذا كانت دالة الاحتمال التراكمي المشتركة لقيم السلسلة ($Y_{t1}, Y_{t2}, Y_{t3}, \ldots, Y_{tn}$) تساوي إلى دالة الاحتمال التراكمي المشتركة ($Y_{t1+k}, Y_{t2+k}, Y_{t3+k}, \ldots, Y_{tn+k}$)، أي أن:

$$P(Y_{t1}<C_1, Y_{t2}<C_2, Y_{t3}<C_3 \ldots, Y_{tn}<C_n) = P(Y_{t1+k}<C_1, Y_{t2+k}<C_2, Y_{t3+k}<C_3 \ldots, Y_{tn+k}<C_n)$$
$$= F(C_1, C_2, C_3, \ldots C_n)$$

حيث: $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ثوابت.

كما يمكن التعبير عن الاستقرارية من خلال الخصائص الإحصائية للسلسلة الزمنية وهي:

- التوقع ثابت: $u_t = E(Y_t) = u \qquad \forall t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

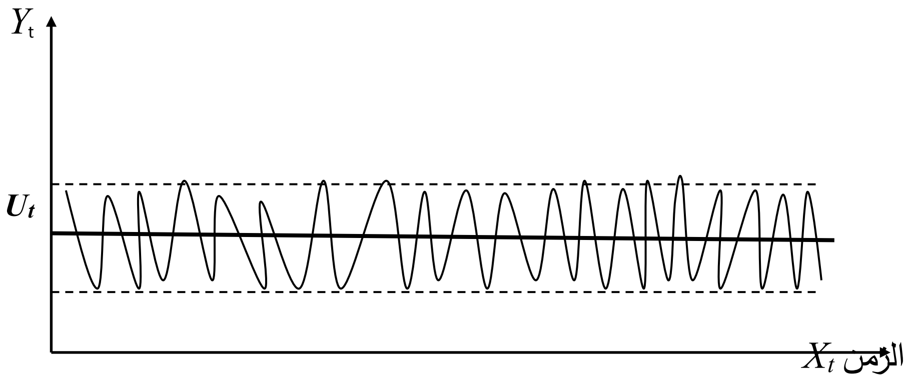
- التباين ثابت: $\sigma_t^2 = Var(Y_t) = \sigma^2 \quad \forall\, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

التغاير: $\gamma(s, t) = Cov(Y_s, Y_t) = E[(Y_s - u)(Y_t - u)] = \gamma(r-t)$

أي أن التغاير بين (Y_s, Y_t) *هو دالة في الفجوة الزمنية* $(s-t)$ وبالتالي يكون:

$$\gamma(t, t+k) = Cov(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma(k) \quad \forall\, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \forall\, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وتظهر حالة الإستقرارية التامة في الشكل 15 ، وما يلاحظ هو أن التذبذبات لقيم السلسلة تعتبر ذات متوسط ثابت u_t وتباين القيم عن المتوسط تقريبا متساوي (σ^2).



تباين مستقر ومتوسط مستقر

الشكل 15: سلسلة زمنية تامة الإستقرارية

2- الإستقرارية الضعيفة: *Weak Stationarity*

تكون السلسلة الزمنية Y_t ذات إستقرارية ضعيفة إذا كانت أي عملية عشوائية لا تؤثر على المتوسط u ويبقى ثابت، أما التغاير بين أي قيمتين للزمن ولتكونا t_1 و t_{1-K} فيعتمد على الإزاحة k (الفرق بين قيمتي الزمن) وليس على قيمة الزمن نفسها،(أنظر الشكل 15).

كما يربط البعض الإستقرارية بالعزوم من الرتبة الأولى والثانية والتي تحقق الشروط التالية:

- التوقع أو متوسط السلسلة لا يعتمد على الزمن t، أي:

$$u_t = E(Y_t) = u \qquad \forall t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- التباين السلسلة الزمنية σ_t^2 لا يعتمد على الزمن t أي أن:

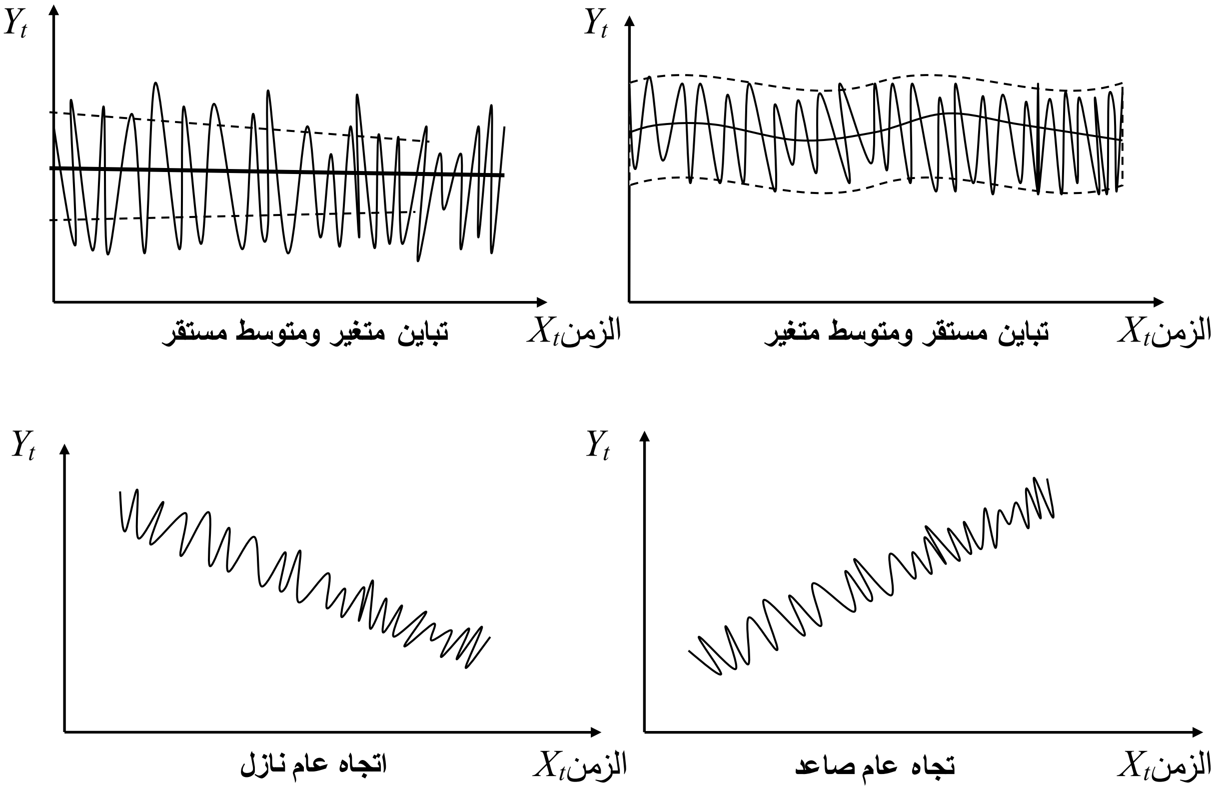
$$\sigma_t^2 = Var(Y_t) = \sigma^2 = \gamma(0) \quad \forall t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- التغاير بين أي قيمتين للسلسلة الزمنية Y_t و Y_{t+k} يعتمد على الفجوة الزمنية بينهما، أي:

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma(k) \quad \forall t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \forall k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ملاحظة هامة: يمكن اعتبار السلاسل الزمنية **ضعيفة الإستقرارية** بسلاسل زمنية **تامة الإستقرارية** فقط عندما يخضع المتغير العشوائي Y_t للتوزيع الطبيعي (*Gaussian Processes*).

إن معظم السلاسل الزمنية والمتعلقة بظواهر اقتصادية أو غيرها تكون عادة ذات إستقرارية ضعيفة أو غير مستقرة (أنظر الشكل 16)، ولهذا كان من الضروري البحث في الآليات والسبل التي تسمح بالتعامل مع هذه السلاسل وتحويلها إلى سلاسل مستقرة للتمكين من دراستها وتحليلها لمعرفة خصائصها وإيجاد النماذج الإحصائية المناسبة المفسرة لسلوك الظواهر وإجراء عمليات التنبؤ.



الشكل 16: السلاسل الزمنية غير المستقرة

مثال توضيحي: إذا كانت لدينا السلسلتين الزمنيتين ممثلتين بمعادلتي الاتجاه العام التاليتين:

$$Y_t = b_0 + \varepsilon_t$$

$$Y_t = b_0 + b_1 X_t + \varepsilon_t$$

أدرس إستقرارية السلسلتين.

الحــــــل:

المعادلة الأولى: تتم دراسة الإستقرارية من خلال الخصائص الإحصائية للسلسلة (المعادلة):

- **التوقع:**

$$E(Y_t) = \hat{Y}_t = b_0 \quad \forall t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

القيمة المتوقعة $\hat{Y}_t$ تساوي ثابت b_0 وبالتالي لا تعتمد على الزمن t.

- **التباين:**

$$Var(Y_t) = Var(b_0 + \varepsilon_t) = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad -$$

أي أن تباين المعادلة هو الآخر ثابت وليس له علاقة بالزمن t.

- **التغاير:**

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = Cov(b_0 + \varepsilon_t,\ b_0 + \varepsilon_{t+k}) = 0 \quad \forall k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

التغاير مستقل عن الزمن t وبالتالي نعتبر السلسلة Y_t سلسلة مستقرة.

المعادلة الثانية:

- **التوقع:**

$$E(Y_t) = \hat{Y}_t = b_0 + b_1 X_t \quad \forall t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

هذا يعني أن المتوسط الحسابي للسلسلة غير ثابت وأن Y_t تتغير بقيمة ثابتة b_1 وهي في نفس الوقت تمثل ميل المعادلة، فإذا كانت $b_1<0$ السلسلة لها اتجاه عام نازل، وإذا كانت $b_1>0$ السلسلة لها اتجاه عام صاعد، ولهذا نعتبر أن السلسلة Y_t غير مستقرة، فالاتجاه العام للسلسلة شرط كاف لعدم إستقرارية السلسلة ولا داعي لدراسة بقية الخصائص (التباين والتغاير) في هذه الحالة.

عموما فإن تحليل السلاسل الزمنية يرتكز على إستقرارية السلاسل الزمنية، ولأهميتها في تفسير الظواهر التي عادة ما تكون لها اتجاه عام، فإجراء تحويلات لهذه السلاسل وجعلها مستقرة ضروري لاختيار النماذج التي تعطي التفسير لهذه الظواهر وتستخدم في عمليات التنبؤ بسلوكها المستقبلي، وقبل الخوض في التحليل لا بأس أن نذكر ببعض المفاهيم المتعلقة بالعمليات العشوائية التي نراها ضرورية في تحليل السلاسل الزمنية وأهمها:

- **العملية العشوائية:** وهي مرتبطة بالمتغيرات العشوائية ε_t غير المرتبطة مع بعضها البعض وتوقعها صفر $E(\varepsilon_t) = 0$ وتباينها مقدار ثابت يعبر عنه دوما بـσ^2 ، وبالنسبة للسلاسل الزمنية فيصطلح على هذه العمليات العشوائية بـ الاضطرابات الهادئة أو الضجيج الأبيض (White Noise).
- **عملية المتوسطات المتحركة:** تعتبر من أهم العمليات في تحليل السلاسل الزمنية والتي لها تطبيقات عديدة في مختلف الظواهر وخاصة الاقتصادية، وكما سنرى في محاور قادمة أنه إذا كان لدينا النموذج التالي:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta\,\varepsilon_{t-1}$$

فإن درجة نعومة السلسلة Y_t يتوقف على المعلمة θ، فإذا كانت $\theta<0$ Y_t أكثر نعومة من عمليات الضجيج الأبيض ε_t، وإذا كانت $\theta>0$ يحدث العكس.

- **عملية الانحدار الذاتي:** سيتم التطرق لها في فقرات قادمة من الدراسة.

Advanced Time Series Analysis

الفصل الثالث: إستقرارية السلاسل الزمنية وتقدير دالة الارتباط الذاتي

الدرس 09

9th Course

المبحث 02: دالة الارتباط الذاتي

1- مفهوم الارتباط الذاتي
2- تقدير دالة الارتباط الذاتي
3- مفهوم الارتباط الذاتي الجزئي
4- تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي

المبحث 02: دالة الارتباط الذاتي *Autocorrelation Function*

تقاس درجة التابعية (الارتباط) الخطية بين أي متغيرين من متغيرات السلسلة الزمنية Y_t بالعديد من الأدوات الإحصائية ومن بينها التغاير الذاتي، فعلى سبيل المثال يقيس التغاير $\gamma(1,2)$ التابعية الخطية بين المتغير العشوائي Y_1 عند النقطة الزمنية t_1 والمتغير العشوائي Y_2 عند النقطة الزمنية t_2، وعليه يمكن اعتبار أن دالة التغاير الذاتي $\gamma(s, t)$ هي دالة في القيمتين أو الحدين t و s.

ولأهمية التحليل لابد من الإشارة إلى الملاحظات التالية:

- إذا كان دالة التغاير $\gamma(s, t) = 0$ فإنه يعبر عن عدم وجود ارتباط خطي بين المتغيرين Y_t وY_s، ولكن يمكن أن يكون ارتباطا غير خطي بينهما؛
- إذا كان دالة التغاير $\gamma(s, t) = 0$ وكانا المتغيران Y_t وY_s لهما توزيع طبيعي ثنائي *Bivariate Normal distribution* يكون المتغيران مستقلان؛
- عندما تكون السلسلة الزمنية مستقرة، فإن دالة التغاير $\gamma(s, t)$ تكون دالة في الفجوة الزمنية k، أي: $k=(s-t)$ وتكتب عادة:

$$\gamma(k) = \gamma(s-t) \quad \forall k = \pm1, \pm2, \ldots$$

1 – مفهوم الارتباط الذاتي:

يعرف الارتباط الذاتي لسلسلة زمنية مستمرة أو المتغير (العملية) عشوائي Y_t بأنه الارتباط بين قيمته في الفترة t وقيمته في فترة مزاحة إلى الأمام أو الخلف $t+k$، فإذا كانت السلسلة الزمنية Y_t مستقرة فإن معامل الارتباط الذاتي يأخذ الصيغة التالية:

$$\rho(s,t) = \frac{E[(Y_s-u)(Y_t-u)]}{\sqrt{E(Y_s-u)^2\ E(Y_t-u)^2}}$$

$$= \frac{E[(Y_s-u_s)(Y_t-u_t)]}{\sqrt{Var Y_s\ .\ Var Y_t}} = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{Var Y_s\ .\ Var Y_t}} = \frac{\gamma(s,t)}{\sigma^2} \qquad \forall s, t=0, \pm1, \pm2, \ldots$$

حيث: $1 \geq \rho(s,t) \geq -1$

والارتباط الذاتي يقيس دوما العلاقة الخطية بين متغيرات نفس السلسلة الزمنية، أي قيمة Y_t عند الفترة t وقيمته (Y_s) عند الفترة s، ومن أهم النقاط الواجب ذكرها هنا والمتعلقة بدالة الارتباط الذاتي الآتي:

- عند $s=t$: $\rho(t,t) = 1$، أي أن الارتباط بين المتغير Y_t ونفسه دوما يساوي الواحد الصحيح؛
- إذا كانت $\rho(s,t) = 0$ تدل عدم وجود علاقة خطية بين Y_t وY_s، لكن يمكن أن تكون علاقة غير خطية بينهما؛
- تكون الفترة بين s و t هي نفس الفترة الزمنية بين t و s، وهو ما يحقق الآتي:

$$\gamma(s,t)=\gamma(t,s)\Rightarrow\rho(s,t)=\rho(t,s)$$

- بالنسبة للسلسلة الزمنية الساكنة فإن معمل الارتباط الذاتي بين المتغيرين Y_t وY_{t+k} يساوي إلى:

$$\rho(K)=\frac{E[(Y_t-u)(Y_{t+k}-u)]}{E[(Y_t-u)^2]}=\frac{\gamma(k)}{\sigma^2}=\frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}\ \forall k=\pm1,\pm2,\dots$$

حيث $\gamma(k)$ التغاير الذاتي عند الفجوة الزمنية k للسلسلة الساكنة و $\gamma(0)$ تمثل تباين نفس السلسلة.

وعموما، فإن العلاقة بين معامل الارتباط الذاتي $\rho(K)$ والفجوة الزمنية k تسمى بدالة الارتباط الذاتي للسلسلة او العملية Y_t، فهي تقيس العلاقة الخطية بين متغيرات نفس السلسلة الزمنية والتي تباعد بين كل قيمتين فجوة زمنية k، أي أنه إذا كانت الفجوة الزمنية $k=1$ فإن دالة الارتباط الذاتي تقيس العلاقة الخطية بين Y_1 وY_2 لنفس السلسلة أو بين Y_t وY_{t-1} وهكذا.

- **خصائص دالة الارتباط الذاتي:** *ACF Properties*

بعد التطرق لمفهوم التغاير، الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي، يمكن حصر أهم خصائص هذه الدالة بالنسبة لسلاسل الزمنية (العمليات) الساكنة في النقاط التالية:

- معامل الارتباط الذاتي عند عدم وجود فجوة زمنية بين المتغيرين Y_t وY_s، أي عند $k=0$، يساوي الواحد الصحيح: $\rho(s,t)=\rho(0,0)=\rho(k=0)=1$؛
- تنحصر قيمة معامل الارتباط الذاتي 1 و1−، أي: $\rho(k)\in[1,-1]$؛
- عند $\rho(k)\pm1$، تكون علاقة خطية تامة بين المتغيرين Y_t وY_s واللذين تكون بينهما الفجوة الزمنية k؛
- مصفوفة الارتباط الذاتي موجبة تماما، حيث ترتبط المعاملات $\rho(ki)$، حيث: $i=0,1,2,\dots$ *بعلاقات* يمكن استنتاجها من علاقة قيم المصفوفة ومحدداتها، حيث مصفوفة الارتباط ل n متغير تأخذ الشكل التالي:

$$\rho(k)=\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(n-1)\\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(n-2)\\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(n-3)\\ . & . & & \dots & .\\ . & . & & \dots & .\\ \rho(n-1) & \rho(n-2) & \rho(n-3) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

مثال توضيحي1: أوجد دالة الارتباط الذاتي للخطأ العشوائي (الضجيج الأبيض) ε_t:

الحـل: من التحليل السابق نعلم أن:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$
$$Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$$
$$\gamma(k) = \mathrm{Cov}((\varepsilon_t\,,\ \varepsilon_{t+K}) = 0 \quad \forall k = \pm 1, \pm 2, \ldots,\ t=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

ومنه تكون دالة الارتباط الذاتي للخطأ العشوائي:

$$\rho(K) = \frac{\gamma(k)}{\sigma^2} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = 0 \quad \forall k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وعليه يمكن استنتاج الآتي:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \rho(i), & k \neq 0 \quad \forall i = 1, 2\ ,, \ldots\ (n-1). \end{cases}$$

مثال توضيحي2: إذا كانت لدينا سلسلة زمنية Y_t ممثلة بدالة الاتجاه العام التالية:

$$Y_t = b_0 + b_1 X_t + \varepsilon_t$$

أوجد دالة الارتباط الذاتي للسلسلة Y_t:

الحــل: الدالة تتكون من جزء محدد وجزء عشوائي، ومنه:

التوقع:

$$E(Y_t) = b_0 + b_1 X_t$$
$$E(\varepsilon_t) = 0$$

التباين:

$$Var(Y_t) = Var(b_0 + b_1 X_t + \varepsilon_t) = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

التغاير:

$$\gamma(K) = Cov(Y_t,\ Y_{t+k}) = Cov(b_0 + b_1 X_t + \varepsilon_t\ ,\ b_0 + b_1 X_{t+k} + \varepsilon_{t+k}) = 0$$
$$\forall k = \pm 1, \pm 2, \ldots,\ \ \forall t = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

ومنه تكون دالة لارتباط الذاتي للسلسلة Y_t:

$$\rho(K) = \frac{\gamma(k)}{\sigma^2} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \rho(i), & k \neq 0 \quad \forall i = 1, 2\ ,, \ldots, (n-1). \end{cases}$$

وتكون $\rho(i)=0$ *عند كل قيم* k *(مهما يكن طول الفجوة الزمنية k)* في السلاسل المستقرة تماما، وهذا على عكس السلاسل غير المستقرة والتي يكون الارتباط بين قيم السلسلة Y_t يختلف عن الصفر (بالموجب أو بالسالب).

2- تقدير دالة الارتباط الذاتي *Autocorrelation Function Estimation*

لاحظنا من خلال التطرق لدالة الارتباط الذاتي أنه تم الاعتماد على خاصية إستقرارية السلاسل الزمنية، من خلال تحليل الخصائص الإحصائية للسلسلة الزمنية للتأكد من إستقراريتها وسهولة تفسيرها وتقديرها باستخدام قيم السلسلة: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ وهو ما يجعل من السهل تقدير دالة الارتباط الذاتي للسلسلة (العملية) العشوائية المستقرة بالاعتماد على الصيغة الرياضية التالية:

$$\mathrm{r}(K) = \hat{\rho}(K) = \sum_{t=1}^{n-k} [(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})] \,/\, \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \bar{Y})^2$$

وعادة ما يتبع تقدير دالة الارتباط الذاتي التوزيع الطبيعي *Normal Distribution*، وخاصة عندما يكون طول السلسلة الزمنية Y_t كبير وبمتوسط $\rho(k)$ وتباين$Var(\rho(k))$.

مثال توضيحي: البيانات في الجدول التالي تتعلق بالمبيعات الشهرية لمؤسسة ما خلال 8 أشهر الأخيرة من سنة 2019:

الشهر (2019)	ماي	جوان	جويلية	اوت	سبتمبر	اكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
المبيعات (ألف وحدة)	15	16	14	14	16	15	16	18

قدر دوال الارتباط الذاتي $\hat{\rho}(K)$ عند: *k=1*، *k=2* و *k=3*:

الحـل: بتطبيق المعادلة $\hat{\rho}(K)$ وبإجراء الحسابات المألوفة نجد:

$$\bar{Y} = 15.5$$

$$\sum_{t=1}^{8} (Y_t - \bar{Y})^2 = 12$$

- عند: $k=1$:

$\sum_{t=1}^{7}[(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})]$= (15−15.5)(16−15.5)+(16−15.5)(14−15.5) +(14−15.5)(14−15.5)+(14−15.5)(16−15.5)+(16−15.5)(15−15.5) + (15−15.5) (16−15.5)+(16.15.5)(18−15.5) =10.75

$$\hat{\rho}(K=1) = r(1) = \frac{6.25}{12} = \mathbf{0.52}$$

أي أنه عند الفجوة الزمنية تساوي 1 يكون معامل الارتباط الذاتي 0.52.

- عند $k=2$:

$\sum_{t=1}^{6}[(Y_t-\bar{Y})(Y_{t+k}-\bar{Y})]$= (15−15.5)(14−15.5)+(16−15.5)(14−15.5)
+(14−15.5)(16−15.5)+(14−15.5)(15−15.5)+(16−15.5)(16−15.5)+
(15−15.5) (18−15.5) = −1.5

$$\hat{\rho}(K=2)=r(2)=\frac{-1.5}{12}=\mathbf{-0.125}$$

أي أنه عند الفجوة الزمنية تساوي 2 يكون معامل الارتباط الذاتي 0.125−.

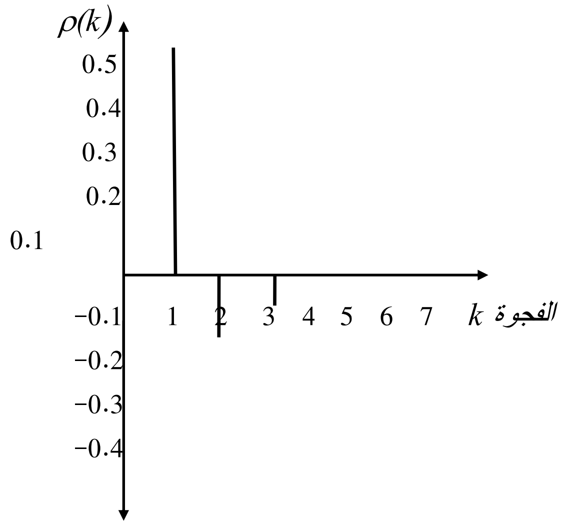
- عند k=3:

$\sum_{t=1}^{5}[(Y_t-\bar{Y})(Y_{t+k}-\bar{Y})]$= (15−15.5)(14−15.5)+(16−15.5)(16−15.5) +
(14−15.5)(15−15.5)+(14−15.5)(16−15.5)+(16−15.5) (18−15.5) = −0.75

$$\hat{\rho}(K=3)=r(3)=\frac{-0.75}{12}=\mathbf{-0.0625}$$

أي أنه عند الفجوة الزمنية تساوي 3 يكون معامل الارتباط الذاتي 0.0625.

وهكذا تتم عملية تقدير دالة الارتباط الذاتي لبقية الفجوات الزمنية (k).



الشكل 17: دالة الارتباط الذاتي (للمثال التوضيحي)

Advanced Time Series Analysis

الفصل الثالث: إستقرارية السلاسل الزمنية وتقدير دالة الارتباط الذاتي

Time Series Stationarity and ACF Estimation

الدرس 10

10^{th} Course

(تابع) المبحث 02: دالة الارتباط الذاتي الجزئي *Partial Autocorrelation Function*

3– مفهوم الارتباط الذاتي الجزئي

4- تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي

3- دالة الارتباط الذاتي الجزئي ($PACF$) Partial Autocorrelation Function

دالة الارتباط الذاتي الجزئي هي من الأدوات ذات الأهمية في تحليل السلاسل الزمنية والتي تساعد على التعرف على طبيعة البيانات والعلاقات في ما بينها، كما تساعد على تحديد النموذج المناسب للتفسير والتنبؤ، وتستخدم دالة الارتباط الذاتي الجزئي في منهجية *Box– Jenkinz* وخاصة في تحديد الفجوات الزمنية بالنسبة لنماذج الانحدار الذاتي (AR)، المتوسطات المتحركة (MA)، ($ARMA$) و($ARIMA$).

تعريف: دالة الارتباط الذاتي الجزئي تقيس الارتباط الذاتي بين أي قيمتين في نفس السلسلة الزمنية بينهما فجوة زمنية $k \geq 2$، فإذا افترضنا السلسلة الزمنيةY_t فإن معامل الارتباط الذاتي الجزئي يقيس الارتباط بين أي قيمتين تابعتين للسلسلة Y_t تتوسطهما فجوة زمنية طولها قيمتين أو أكثر بشرط عزل ارتباطات قيم الفجوة مع Y_t، فلو افترضنا أننا نريد قياس الارتباط بين القيمتين Y_t و Y_{t-k} لنفس السلسلة الزمنية يكون معامل الارتباط الجزئي بينهما هو معامل الارتباط الخطي بين Y_t و Y_{t-k} بعد حذف تأثيرات القيم التي تتوسطهما وهي القيم: $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-1+K}$.

ويرمز عادة لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي للفجوة الزمنية k بـ: ϕ_{kk} وهو الارتباط الخطي بين المتغيرين:

$$[Y_t - E(Y_t / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-K+1})] \text{ و } [Y_{t-k} - E(Y_{t-k} / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-K+1})]$$

ويحسب عادة بالعلاقة التالية:

$$\phi_{kk} = \frac{E[[Y_t - E(Y_t / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})]\,[Y_{t-k} - E(Y_{t-k} / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})]]}{\sqrt{Var[Y_t - E(Y_t / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})]\; Var[\,[Y_{t-k} - E(Y_{t-k} / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})}}$$

أو:

$$\phi_{kk} = Corr[[Y_t - E(Y_t / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})][\,[Y_{t-k} - E(Y_{t-k} / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})]]$$

– خصائص دالة الارتباط الذاتي الجزئي:

لدالة الارتباط الذاتي الجزئي (*PACF*) عدة خصائص أهمها:

- معامل الارتباط الذاتي الجزئي لنفس القيمة في السلسلة يساوي 1، أي أن: $\phi_{kk} = \phi_{00} = 1$ عند $k=0$؛
- تنحصر قيمة معامل الارتباط الذاتي الجزئي بين 1 و-1، أي: $\phi_{kk} \in [1, -1]$؛
- معامل الارتباط الذاتي الجزئي يساوي معامل الارتباط الذاتي بين القيمتين المتتاليتين في السلسلة، أي عند $k=1$: $\rho(1) = \phi_{11}$, فعلى سبيل المثال الارتباط الذاتي الجزئي بين القيمتين Y_t ; و Y_{t-1} هو نفسه الارتباط الذاتي بين القيمتين لأنه لا توجد قيم أخرى تتوسطهما في السلسلة؛
- إذا كان معامل الارتباط الذاتي الجزئي يساوي الصفر ($\phi_{kk}=0$)، فهذا يدل على عدم وجود ارتباط

خطي بين متغيرين الفاصل الزمني بينهما هو k.

عموما، فإن دالة الارتباط الذاتي الجزئي لا تقل أهمية عن بقية الخصائص الإحصائية للسلاسل الزمنية، فهي تستخدم في اختبار إستقرارية السلاسل إلى جانب الأدوات الأخرى، إضافة إلى أنها تساعد على تشخيص النموذج المناسب لعملية التنبؤ.

4– تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي: *PACF Estimation*

عرف الفكر في تحليل السلاسل الزمنية تطورا سريعا، خاصة بعد ظهور منهجية *Box–Jenkinz*، وهو ما سمح بظهور أساليب عديدة في تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي، وكان من أهمها أسلوب *Yule–Walker*، لكن قبل التطرق لذلك ولتبسيط الفكرة نبدأ بالأسلوب المبسط التالي:

يفترض هذا الأسلوب أن الارتباط بين القيمتين (المتغيرين) في السلسلة Y_t و Y_{t-k} تكون في صورة دالة خطية بين (القيمة) المتغير بين Y_{t-k} والقيم (المتغيرات) التي تقع بينها وبين Y_t، أي:

$$Y_{t-k} = b_0 + b_1Y_{t-k+1} + b_2Y_{t-k+2} + \dots + b_{k-1}Y_{t-1} + \varepsilon_{t-k} \qquad k=1, 2, 3, \dots, n-1 \qquad \dots \quad (1)$$

وعليه تكون دالة المتغير العشوائي (الضجيج الأبيض) كالتالي:

$$\varepsilon_{t-k} = Y_{t-k} - (b_0 + b_1Y_{t-k+1} + b_2Y_{t-k+2} + \dots + b_{k-1}Y_{t-1})$$

كما يفترض هذا الأسلوب وجود علاقة خطية بين Y_t و القيم (المتغيرات) التي تقع بينها وبين Y_{t-1}، أي:

$$Y_t = a_0 + a_1Y_{t-k+1} + a_2Y_{t-k+2} + \dots + a_{k-1}Y_{t-1} + e_{t-k} \qquad k=1, 2, 3, \dots, n-1 \qquad \dots \quad (2)$$

ومنه تكون دالة المتغير العشوائي (الضجيج الأبيض) على الصورة التالية:

$$e_{t-k} = Y_t - (a_0 + a_1Y_{t-k+1} + a_2Y_{t-k+2} + \dots + a_{k-1}Y_{t-1})$$

لحساب معامل الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} بين قيمتين السلسلة الزمنية (المتغيرين) Y_t و Y_{t-k} تتبع الخطوات التالية:

- نجري الانحدار على المعادلتين (1) و(2) عند $k=2$ ونحصل على قيم البواقي $\widehat{\varepsilon t}$ و $\widehat{et}$ ، أي:

$$Y_{t-2} = b_0 + b_1Y_{t-1} + b_2Y_t$$
$$Y_t = a_0 + a_1Y_{t-1} + a_2Y_t$$

- يحسب معامل الارتباط r بين قيم البواقي $\widehat{\varepsilon t}$ و $\widehat{et}$ ، وهذا سيعطي تقدير مناسب لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي $\widehat{\phi_{22}}$؛
- نكرر الخطوتين السابقتين عند $k=3$ لنحصل على $\widehat{\phi_{33}}$؛
- نكرر نفس العملية بالنسبة لكل قيم الفجوة k لنحصل على بقية الارتباطات الجزئية.

ما يلاحظ أن هذا الأسلوب رغم بساطته إلا أنه ينطوي على إجراءات طويلة تحتاج إلى وقت وجهد، حيث أن لكل قيمة لمعامل الارتباط نحتاج إلى معادلتين وإجراء الانحدار عليهما، وهو ما جعل العمل بأسلوب معادلات *Yule–Walker* أكثر اهتماما.

– معادلات *Yule–Walker*:

تستخدم معادلات أو أسلوب *Yule–Walker* في تقدير معاملات الارتباط الذاتي الجزئي للفجوات: $1, 2, 3, \dots, k$ بإتباع الخطوات التالية:

- يتم وضع معامل الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} عند الفجوة الزمنية k معامل نموذج الانحدار التالي:

$$Y_t = \phi_{k1}Y_{t-1} + \phi_{k2}Y_{t-2} + \dots + \phi_{kk}Y_{t-k} + \varepsilon_t \qquad k=1, 2, 3,$$

- يتم ضرب المعادلة أعلاه في Y_{t-1}، ثم يحسب معامل الارتباط الذاتي بين Y_t و Y_{t-1}: $\rho(1)$ والذي يساوي:

$$\rho(1) = \frac{Cov(Yt, Yt-1)}{\sqrt{VarYt}\,\sqrt{Var\,Yt-1}}$$

ثم تتكرر العملية ويتم ضرب المعادلة السابقة في Y_{t-2} وتحسب $\rho(2)$، ثم نكرر العملية ونضرب في Y_{t-3} وحساب $\rho(3)$، ... إلى آخر قيمة وهي الضرب في Y_{t-k} لحساب $\rho(k)$.

إذا تقنية أو أسلوب *Yule–Walker* *يتكون من k معادلة خطية* بالمعاملات: $\phi_{k1}, \phi_{k2}, \dots, \phi_{kk}$، ويكون الشكل العام لمعادلات *Yule–Walker* على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
\rho(1) &= \phi_{k1}\rho(0) + \phi_{k2}\rho(1) + \dots + \phi_{kk}\rho(k-1)\\
\rho(2) &= \phi_{k1}\rho(1) + \phi_{k2}\rho(0) + \dots + \phi_{kk}\rho(k-2)\\
\dots &\qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots\\
\rho(k) &= \phi_{k1}\rho(k-1) + \phi_{k2}\rho(k-2) + \dots + \phi_{kk}\rho(0)
\end{aligned}$$

كما يمكن كتابة المعادلات السابقة على شكل خطي: ***AX=B*** في المصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix}
1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(k-1)\\
\rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-2)\\
\rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-3)\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \dots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\phi_{k1}\\ \phi_{k2}\\ \phi_{k3}\\ \dots\\ \phi_{kk}\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}\rho(1)\\ \rho(2)\\ \rho(3)\\ \dots\\ \rho(k)\end{pmatrix}$$

ولإيجاد معامل الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} بدلالة معامل الارتباط الذاتي $\rho(k)$ نقوم بقسمة محدد المصفوفة أعلاه على المصفوفة (*Cramer's Rule*)، أي:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}}$$

مثال توضيحي1: أحسب معامل الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{11} للدالة التالية باستخدام تقنية *Yule–Walker*:

$$Y_t = \phi_{k1}Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

الحـــــــل: يتم ضرب المعادلة في Y_{t-1} فنحصل على المعادلة بدلالة الارتباطات الذاتية كالتالي:

$$\rho(1) = \phi_{k1}\rho(0)$$

ومن المعلوم أن الارتباط بين القيمة (أو المتغير) ونفسها يساوي 1 كما أشرنا في فقرات سابقة ومنه:

$$\rho(1) = \phi_{k1}$$

وهذا يدل على أن معامل الارتباط الذاتي يساوي دوما معامل الارتباط الذاتي الجزئي بين أي قيمتين متتاليتين في السلسلة.

مثال توضيحي2: إذا كانت لدينا دالة خطية بفجوة زمنية *k=2*، أحسب ϕ_{22}.

$$Y_t = \phi_{k1}Y_{t-1} + \phi_{k2}Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

الحـــــل: يتم ضرب المعادلة في Y_{t-1} و Y_{t-2} فنحصل على المعادلة بدلالة الارتباطات الذاتية كالتالي:

$$\rho(1) = \phi_{k1}\rho(0) + \phi_{k2}\rho(1)$$

$$\rho(2) = \phi_{k1}\rho(1) + \phi_{k2}\rho(0)$$

و منه نستطيع وضع النتيجة في مصفوفة على النحو التالي:

$$\phi_{22} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{bmatrix}} = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}$$

مثال توضيحي 3: أوجد قيم الارتباطات الجزئية ϕ_{11} و ϕ_{22} وϕ_{33} للمثال السابق والخاص بمبيعات المؤسسة.

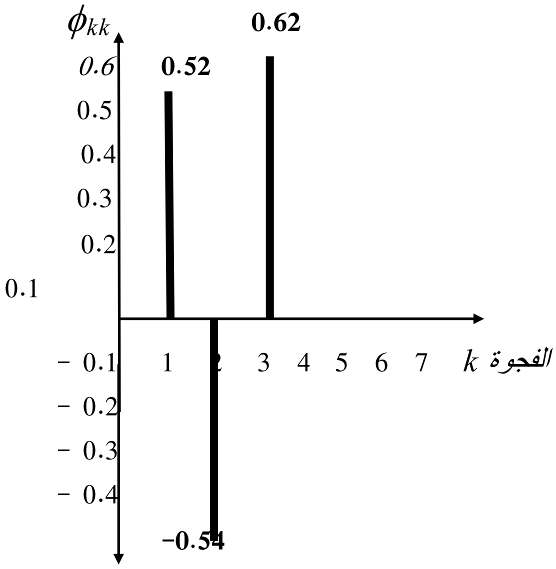
الحـــل:

$$\phi_{11} = \rho(1) = \mathbf{0.52}$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho(2)-\rho(1)^2}{1-\rho(1)^2} = \frac{-0.125-0.52^2}{1-0.52^2} = \frac{-0.3954}{0.7296} = \mathbf{-0.542}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.52 & 0.52 \\ 0.52 & 1 & -0.125 \\ -0.125 & 0.52 & -0.0625 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.52 & -0.125 \\ 0.52 & 1 & 0.52 \\ -0.125 & 0.52 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0.23}{0.37} = \mathbf{0.62}$$

كما يمكن عرض شكل دالة الارتباط الجزئي للبيانات الخاصة بالمؤسسة كما يلي:



الشكل 18: دالة الارتباط الذاتي الجزئي (للمثال التوضيحي 3)

Advanced Time Series Analysis

الفصل الرابع: نماذج السلاسل الزمنيـة العشوائيـة

Stochastic Time Series Models

الدرس 11

11^{th} Course

المبحث 01: نموذج الانحدار الذاتي *Autoregression Model (AR)*

1- مؤثرات وتحويلات السلاسل الزمنية

المبحث 01: نموذج الانحدار الذاتي *Auto-Regressive Model*

سنتناول في هذا المبحث عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى والرتبة P، إلا أنه ولأهمية مؤثرات السلاسل الزمنية في التحليل سيتم التطرق أولا إلى مؤثرات الإزاحة للخلف ومؤثرات الفرق، إضافة إلى كيفية تحويل السلاسل غير المستقرة إلى سلاسل مستقرة.

1– مؤثرات وتحويلات السلاسل الزمنية:

تعتبر مؤثرات الإزاحة إلى الخلف ومؤثرات الفرق من الموضوعات ذات الأهمية في فهم واستخدام منهجية *Box–Jenkinz*.

أ– مؤثر الإزاحة للخلف *Backward Shift Operator*

إذا كانت لدينا سلسلة زمنية، وكانت قيمها مرتبة حسب الزمن، وكانت قيمتها عند الزمن t هي Y_t، وكانت قيمتها عند الزمن t-1 هي Y_{t-1} يكون مؤثر الإزاحة للخلف L:

$$LY_t = Y_{t-1}$$
$$L^2Y_t = BY_{t-1} = Y_{t-2}$$
$$\vdots$$
$$L^nY_t = Y_{t-n}$$

ويستخدم مؤثر الإزاحة L في تحليل السلاسل الزمنية في شكل كثيرات الحدود وأهمها:

- **مؤثر الانحدار الذاتي** *Autoregressive Operator*

يأخذ هذا المؤثر الصيغة التالية:

$$\phi(L) = 1-\phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_P L^P$$

وتسمى بكثيرة الحدود ϕL من الرتبة P وتستخدم في السلسلة الزمنية Y_t كما يلي:

$$\phi(L)Y_t = Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_P Y_{t-P} = \sum_{i=0}^{P} \phi_i Y_{t-i} \quad ; \ \phi_0 = 1$$

- **مؤثر المتوسطات المتحركة** *Moving Averages Operator*

يأخذ مؤثر المتوسطات المتحركة عادة الصيغة التالية:

$$\theta(L) = 1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

فهي كثيرة الحدود من الرتبة q وتستخدم عادة في عمليات الضجيج الأبيض(*White Noise*) كما يلي:

$$\theta(L)\varepsilon_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} = \sum_{j=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-j} \quad ; \ \theta_0 = 1$$

ب– مؤثر الفرق للخلف *Backward Difference Operator*

يستخدم مؤثر الفرق للخلف Δ في السلاسل الزمنية كما يلي:

$$\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = (1-L)\ Y_t$$

$$\Delta^2 Y_t = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) = (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) = Y_t - 2\ Y_{t-1} + Y_{t-2} = (1-L)^2\ Y_t$$

وعليه تكون العلاقة بين المؤثر L والفرق Δ:

$$\Delta = (1-L) \ ; \ \Delta^n = (1-L)^n$$

ج– تحويلات السلاسل الزمنية:

من الأمور المسلم بها وفق منهجية *Box– Jenkinz* أن تحليل السلاسل الزمنية يتطلب استقرارية السلاسل وإن كانت غير مستقرة، فلا بد من العمل على تحويلها إلى سلسلة مستقرة باستخدام بعض الأدوات الرياضية ومن أهمها أخذ الفرق الأول أو الفرق الثاني للسلسلة أو أخذ الفرق ألّلوغريتمي الأول أو الثاني.

- **فروق السلسلة** *Serie's Difference*

تتصف معظم الظواهر ومنها الاقتصادية بوجود اتجاه عام للسلسلة، وهو ما يجعلها سلسلة غير مستقرة، ولجعلها مستقرة يتم تحويلها إلى سلسلة تتكون من الفروق الأولى للبيانات أي:

إذا رمزنا للسلسلة الجديدة بـ Z_t، حيث:

$$Z_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} \quad ; t=1,2, \ldots ,n$$

فإذا كانت كل قيم السلسلة Y_t غير مستقرة، فإننا نحصل على السلسلة الجديدة Z_t من خلال أخذ الفرق الأول كما هو مبين في الجدول التالي:

الجدول 15: سلسلة الفروق الأولى Z_t

السلسلة المحولة Z_t	السلسلة الأصلية Y_t
-	Y_1
$Z_1 = Y_2 - Y_1$	Y_2
$Z_2 = Y_3 - Y_2$	Y_3
.	.
.	.
$Z_{n-1} = Y_n - Y_{n-1}$	Y_n

ما يلاحظ أن السلسلة الجديدة Z_t وهي سلسلة الفرق الأول تحتوي على $n-1$ قيمة أو مشاهدة، أما السلسلة الأصلية Y_t فتحتوي على n قيمة أو مشاهدة.

مثال توضيحي 1: إذا كانت دينا السلسلة Y_t التالية:

$$Y_t = b_0 + b_1 X_t + U_t$$

أدرس إستقرارية السلسلة، وبين كيف تتم عملية تحويلها إلى سلسلة مستقرة.

الحـــــل:

$$E(Y_t) = b_0 + b_1 X_t \ ; \ t=1,2,\ldots,n$$

الدالة ذات اتجاه عام، وهو شرط كاف على عدم إستقرارية السلسلة

ونعلم أن: $Y_{t-1} = b_0 + b_1 X_{t-1} + U_{t-1}$

وحيث أن السلسلة المحولة:

$$Z_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = b_1(X_t - X_{t-1}) + U_t - U_{t-1}$$

وحيث $X_t - X_{t-1}$ تمثل فارق الزمن بوحدة واحدة:

$$Z_t = Y_t - Y_{t-1} = b_1 + U_t - U_{t-1}$$

ولإثبات إستقرارية السلسلة المحلة نتأكد من توافر شروط الإستقرارية المذكورة في دروس سابقة وهي:

- **التوقع:**

$$E(Z_t) = E(Y_t - Y_{t-1}) = E(b_1 + U_t - U_{t-1}) = b_1$$

إذا فتوقع الدالة ثابت بالقيمة b_1 مهما كانت t.

- **التغاير:** دالة التغاير الذاتي للسلسلة المحولة تكون:

$$Cov(Z_t, Z_{t-1}) = Cov(b_1 + U_t - U_{t-1}, b_1 + U_{t-1} - U_{t-2})$$
$$= Cov(U_t - U_{t-1}, U_{t-1} - U_{t-2}) = \gamma(k=1) + \gamma(k=1) - \sigma^2 - \gamma(k=2)$$
$$= \mathbf{2\gamma(k=1) - \sigma^2 - \gamma(k=2)}$$

ما يلاحظ على دالة التغاير الذاتي أنها في علاقة مع الفجوة الزمنية k ولا تعتمد على t.

- **التباين:**

$$Var(Zt) = Var(b_1 + U_t - U_{t-1}) = Var(U_t - U_{t-1}) = \sigma^2 - 2\gamma(1) + \sigma^2$$
$$= \mathbf{2\sigma^2 - 2\gamma(1)}$$

التباين هو الآخر يعتمد على الفجوة k فقط، وبالتالي نعتبر السلسلة Z_t سلسلة مستقرة.

مثال توضيحي 02: السلسلة Y_t تأخذ الشكل التالي:

$$Y_t = b_0 + Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

أدرس إستقرارية السلسلة، وبين كيف تتم عملية تحويلها إلى سلسلة مستقرة.

الحــل: للتأكد من إستقرارية السلسلة Y_t وكالعادة:

- **التوقع**:

$$E(Y_t) = b_0 + E(Y_{t-1})$$
$$E(Y_t) \neq (E(Y_{t-1})$$

السلسلة Y_t **غير مستقرة من حيث الوسط الحسابي**، وبالتالي وجب تحويلها على النحو التالي:

$$Z_t = Y_t - Y_{t-1} = b_0 + \varepsilon_t$$

- **التوقع:**

$$E(Z_t) = E(Y_t - Y_{t-1}) = E(b_0 + \varepsilon_t) = E(\varepsilon_t) = 0$$

السلسلة مستقرة من حيث التوقع لأن الوسط الحسابي ثابت ولا يتأثر بالزمن.

- **التغاير:** دالة التغاير الذاتي للسلسلة المحولة:

$$Cov(Z_t, Z_{t-1}) = Cov(b_0 + \varepsilon_t, b_0 + \varepsilon_{t-1}) = 0$$

ومنه دالة التغاير الذاتي تعتمد على الزمن t.

- **التباين:**

$$Var(Z_t) = Var(Y_t - Y_{t-1}) = Var(b_0 + \varepsilon_t) = \sigma^2$$

التباين هو الآخر لا يعتمد على الزمن t وبالتالي فإن السلسلة Zt مستقرة.

ملاحظة: في حالة عدم إستقرارية الفرق الأول، يتم تحويل Z_t إلى سلسلة محولة W_t (سلسلة محولة

بالفرق الثاني) كما هو مبين في الجدول التالي:

الجدول 16: سلسلة الفروق الثانية W_t

السلسلة الأصلية Y_t	السلسلة المحولة بالفرق الأول Z_t	السلسلة المحولة بالفرق الثاني W_t
Y_1	-	-
Y_2	$Z_2 = Y_2 - Y_1$	-
Y_3	$Z_3 = Y_3 - Y_2$	$W_3 = Z_3 - Z_2$
.	.	$W_4 = Z_4 - Z_3$
.	.	.
.	.	.
Y_n	$Z_n = Y_n - Y_{n-1}$	$W_n = Z_n - Z_{n-1}$

ما يلاحظ أن السلسلة الجديدة W_t وهي سلسلة الفرق الثاني تحتوي على n-2 قيمة أو مشاهدة.

- **فروق اللوغريتمات** *Logarithmic difference*

تتنوع السلاسل الزمنية بتنوع الظواهر المدروسة، فقد نجد بعض السلاسل تكون مستقرة نسبيا من حيث الوسط الحسابي إلا أن التباين يتغير عبر الزمن، ولتسكين التباين قد تستخدم عدة تحويلات كأخذ تحويلة الجذر التربيعي، أو المقلوب أو تحويلات *Box–Cox*، إلا أن التحويل اللوغاريتمي يبقى الأسلوب الأفضل على الإطلاق، وخاصة عندما تكون السلسلة غير خطية ويؤخذ الفرق الأول أو الثاني بنفس الكيفية الموجودة في الجدول 16، فقط يكون العمل بالقيم اللوغاريتمية بدلا من القيم الحقيقية للسلسلة الأصلية.

Advanced Time Series Analysis

الفصل الرابع: نماذج السلاسل الزمنية العشوائية

Stochastic Time Series Models

الدرس 12

12th Course

(تابع) المبحث 01: نموذج الانحدار الذاتي *Autoregression Model (AR)*

2- نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR(1)

3- نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية AR(2)

4- نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة *p*. AR(*p*)

2- نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى $AR_{(1)}$

يأخذ نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى شكل معادلة انحدار لقيمة السلسلة Y_t كدالة في قيمة السلسلة Y_{t-1} ، ويمكن كتابتها في الشكل التالي:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad ; t= \pm 1, \pm 2, \ldots$$

حيث ε_t الضجيج الأبيض (اضطراب الهادئ).

ويمكن كتابة النموذج بالمؤثر على النحو التالي:

$$\phi(L)\, Y_t = \varepsilon_t$$

حيث:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L$$

وتسمى $\phi(L)$ كثير الحدود بمؤثر الانحدار الذاتي.

ولمعرفة شروط إستقرارية النموذج لابد من التعبير عن عمليات الانحدار الذاتي عبر الزمن t بصيغة الحد العشوائي (الضجيج الأبيض) ε ويتم ذلك كالتالي:

$$Y_{t-1} = \phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$
$$Y_{t-2} = \phi Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$$
$$\vdots$$
$$Y_{t-k} = \phi Y_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k}$$

وبالتعويض نجد:

$$Y_t = \phi(\phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$
$$\Rightarrow Y_t = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 Y_{t-2}$$

ما يلاحظ أنه كلما زادت الفجوة الزمنية بين قيمة السلسلة Y_t وقيمها في فترات سابقة كلما قل الارتباط، فاعتماد Y_t على Y_{t-1} هو أكبر من اعتمادها على Y_{t-2} وهكذا ... .

وعند تكرار العملية k من المرات نجد:

$$Y_t = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \phi^3 \varepsilon_{t-3} + \ldots. + \phi^k \varepsilon_{t-k} + \phi^{k+1} Y_{t-k-1}$$

ويمكن كتابة المعادلة على النحو التالي:

$$\boldsymbol{Y_t = \sum_{i=0}^{i=k} \phi^i \varepsilon_{t-i} + \phi^{K+1} Y_{t-k-1}}$$

إذا افترضنا أن المعامل $|\phi| < 1$ و $k \to \infty$ فإن $\phi^{K+1}\, Y_{t-k-1} \to 0$ ومنه:

$$\boldsymbol{Y_t = \sum_{i=0}^{i=k} \phi^i \varepsilon_{t-i}} \quad ; \ |\phi| < 1$$

أما إذا كانت $|\phi| < 1$ فإنه لا يمكن حذف الحد الأخير للمعادلة $(\phi^{K+1}\, Y_{t-k-1})$ وبالتالي لا يمكن

التعبير عن النموذج $AR_{(1)}$ بدلالة الضجيج الأبيض ε، وهو ما يجعلنا نصل إلى النتيجة التالية:

أن النموذج $AR_{(1)}$ يكون ساكن فقط عند: $|\phi| < 1$.

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج الانحدار الذاتي** *ACF for $AR_{(1)}$ Model*

لنأخذ نموذج الانحدار من الرتبة الأولى التالي:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

وبافتراض أن النموذج مستقر، أي: $|\phi| < 1$، فإن توقع النموذج يكون:

التوقع:

$$E(Y_t) = \phi E(Y_{t-1})$$

$$\Rightarrow E(Y_t) = E(Y_{t-1}) \Rightarrow E(Y_t) - \phi E(Y_{t-1}) = E(Y_t)[1-\phi] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{E(Y_t) = 0}$$

التباين:

$$Var(Y_t) = \phi^2 Var(Y_{t-1}) + Var(\varepsilon_t)$$

وحيث أن النموذج مستقر:

$$Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) = \gamma(0)$$

أي:

$$\gamma(0)(1-\phi^2) = \sigma^2$$

$$Var(Y_t) = \gamma(0) = \frac{\sigma^2}{(1-\phi^2)} \quad ; \quad |\phi| < 1$$

التغاير:

أ– التغاير عند $k=1$:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-1})$$

$$\Rightarrow \gamma(1) = \phi\, \gamma(0)$$

ب– التغاير عند $k=2$:

$$Cov(Y_t, Y_{t-2}) = Cov(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-2})$$

$$\Rightarrow \gamma(2) = \phi\, \gamma(1) = \phi^2\, \gamma(0)$$

ج– التغاير عند: $k = 1, 2, \ldots$:

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-k})$$

$$\Rightarrow \gamma(k) = \phi\, \gamma(k-1)$$

من ثم فإن دالة الارتباط الذاتي لنموذج $AR_{(1)}$ تكون:

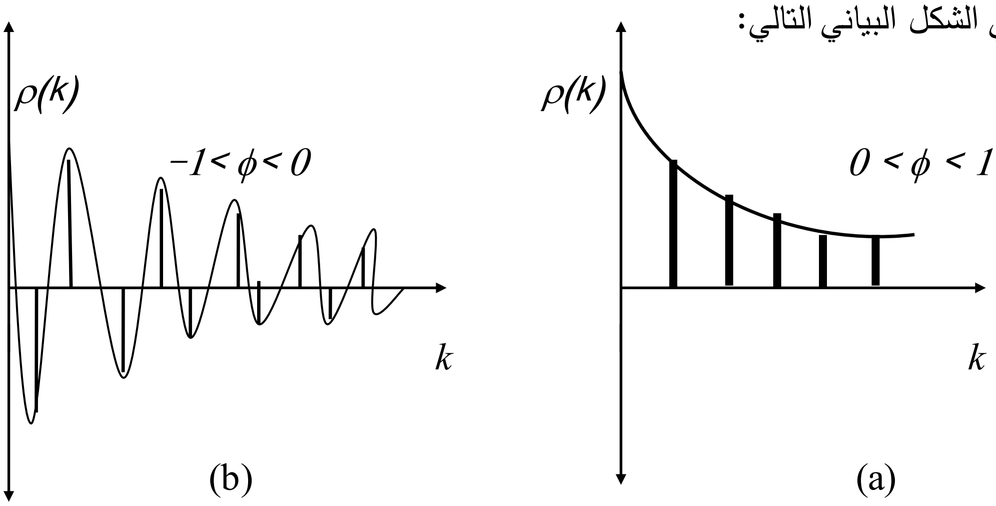
$$\rho(k) = \phi\, \rho(k-1) \quad ; k = 1, 2, \ldots$$

مما سبق يمكن استنتاج الآتي:

$$\rho(k) = \phi\, \rho(k-1) = \phi^2 \rho(k-2) = \phi^3 \rho(k-3) = \ldots = \phi^k \rho(0)$$

دالة الارتباط الذاتي لنموذج $AR_{(1)}$ $\quad P(k) = \phi^k \quad ; k = 1, 2, .. \quad ; |\phi| < 1$

ونعلم أن عند: $|\phi| < 1$ تأخذ ϕ المجالين: $-1< \phi < 0$ و $0 < \phi < 1$ بحيث تكون دالة الارتباط الذاتي كما هو مبين في الشكل البياني التالي:



الشكل 19: دالة الارتباط الذاتي لنموذج الانحدار الذاتي *AR*.

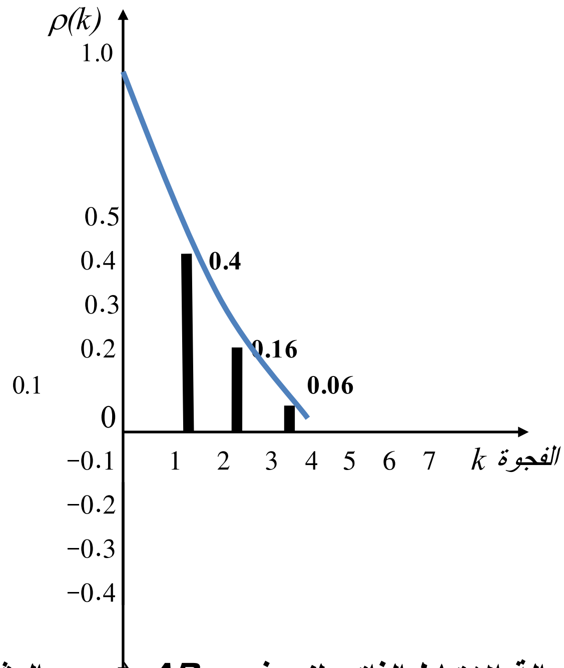
الشكل 19 (a) يلاحظ أن دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ تتناقص في شكل غير خطي (أسي) كلما زادت k، بينما الشكل 19 (b) فيظهر تناقص $\rho(k)$ حيث ϕ سالبة، والشكل التناقص يأخذ صورة ترددات متناقصة مرة سالبة ومرة موجبة وتقترب من الصفر.

مثال توضيحي: أوجد دالة الارتباط الذاتي للسلسلة الزمنية Y_t والتي تتبع النموذج التالي:

$$Y_t = 0.4\ Y_{t-1}$$

الحــل: دالة الارتباط الذاتي لنموذج $AR_{(1)}$:

$$\rho(k) = \phi^k = 0.4^K \quad ; k = 1, 2, ..$$



الشكل 20: دالة الارتباط الذاتي لنموذج $AR_{(1)}$ (حسب المثال)

ما يلاحظ على الشكل أن الارتباط يتناقص بشكل سريع ليقترب من الصفر كلما زادت الفجوة k، وهو ما يدل على إستقرارية هذه السلسلة.

- **دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج $AR_{(1)}$**

الارتباط الذاتي الجزئي كما أوضحنا في فقرات سابقة ϕ_{kk} ومن خلال معادلات Yule–Walker هو عبارة عن حاصل قسمة محدد المصفوفة Δ' على المصفوفة Δ، أي:

$$\phi_{kk} = \frac{\Delta'}{\Delta} \qquad ; k = 2, 3, 4, \dots$$

كما نعلم أن معامل الارتباط الذاتي لنموذج $AR_{(1)}$ يساوي:

$$\rho(k) = \phi\, \rho(k-1) \qquad ; k = 1, 2, \dots$$

وبتعويض هذه القيمة في العمود الأخير محدد المصفوفة نحصل على قيمة الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} كالتالي:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \phi \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \phi\rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \phi\rho(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \dots & \phi\rho(k-1) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}}$$

ما يلاحظ أن العمودان الأول والأخير في البسط متشابهان لو تم إخراج ϕ عامل مشترك، وهو ما يجعل قيمة المحدد (البسط) تساوي الصفر عند أي قيمة لـ $k = 2, 3, 4 \dots$ أي:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 0 & ; k = 2, 3, \dots \\ \rho(1) & ; k = 1 \end{cases}$$

أي أن الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج $AR_{(1)}$ يساوي دوما الصفر بعد الفجوة الزمنية الأولى، وهذا طبيعي لأن النموذج يظهر العلاقة بين Y_t و Y_{t-1} فقط.

3 – نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية $AR_{(2)}$

نظرا لأهمية نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية $AR_{(2)}$ في الدراسات الاقتصادية والمالية، فإننا سنلقي نظرة خفيفة عن هذا النموذج وسكونه، ويأخذ هذا النموذج عادة الشكل التالي:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

- **شروط إستقرارية نموذج $AR_{(2)}$:**

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$
$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$
$$|\phi_2| < 1$$

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج $AR_{(2)}$ ACF for**

بإتباع نفس الخطوات في نموذج $AR_{(1)}$ نحصل على الارتباط الذاتي لنموذج $AR_{(2)}$ كالتالي:

$$\rho(0) = 1$$
$$\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad ; \quad |\phi_2| < 1$$
$$\rho(2) = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2}$$

- **دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج $AR_{(2)}$ PACF for**

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1-\phi_2} & ;\ k=1 \\ \phi_2 & ;\ k=2 \\ 0 & ;\ k=3,4,.. \end{cases}$$

ما يلاحظ أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج $AR_{(2)}$ تنقطع بعد الفجوة الزمنية، أي عند: . ,k = 3, 4.

مثال توضيحي: ليكن لدينا النموذجين التاليين:

$$Y_t = -0.2Y_{t-1} + 0.6Y_{t-2}$$
$$Y_t = 1.2Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2}$$

- اختبر إستقرارية النموذجين.
- أحسب معاملات الارتباط الجزئي للنموذجين.

الحـــل: – إختبار الإستقرارية:

النموذج الأول:

$$\phi_1 + \phi_2 = -0.2 + 0.6 = 0.4$$
$$\phi_2 - \phi_1 = 0.6 - (-0.2) = 0.8$$
$$\phi_2 = 0.6$$

النموذج الأول مستقر لأن شروط الإستقرارية متوفرة.

النموذج الثاني:

$$\phi_1 + \phi_2 = 1.2 + (-0.2) = 1.0$$
$$\phi_2 - \phi_1 = -0.2 - (1.2) = -1.4$$

$\phi_2 = -0.2$

النموذج الثاني غير مستقر لعدم توفر الشرطين الأول والثاني.

- **حساب معاملات الارتباط الجزئي:**

<u>النموذج الأول:</u>

$$\phi_{kk} = \begin{cases} -0.5 & ;\ k = 1 \\ 0.6 & ;\ k = 2 \\ 0 & ;\ k = 3,\ 4,\ .. \end{cases}$$

<u>النموذج الثاني:</u>

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1 & ;\ k = 1 \\ -0.2 & ;\ k = 2 \\ 0 & ;\ k = 3,\ 4,\ \ldots \end{cases}$$

4 – نموذج الانحدار الذاتي العام AR(*p*)

يأخذ النموذج العام للانحدار الذاتي أو كما يطلق عليه نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة *P* الصيغة التالية:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \ldots. + \phi_P Y_{t-P} + \varepsilon_t$$

حيث: ε_t الضجيج الأبيض و $\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_P$ معلمات النموذج، ويمكن كتابة النموذج بصيغة مؤثر الانحدار الذي تم التطرق إليه سابقا كالتالي:

نعلم أن مؤثر الانحدار الذاتي يأخذ الصيغة العامة التالية:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots. - \phi_P L^P$$

ويستخدم في السلسلة الزمنية Y_t كما يلي:

$$\phi(L)\, Y_t = Y_t - \phi_1\, Y_{t-1} - \phi_2\, Y_{t-2} - \ldots. - \phi_P\, Y_{t-P} = \varepsilon_t$$

هذا النموذج قد يكون مستقر وقد لا يكون كذلك، وتعتمد استقراريته على المعلمات $\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_P$، كما يمكن معرفة دالة الارتباط الذاتي من خلال معادلة الفروق التالية:

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \ \ldots + \phi_p \rho(k-p) \qquad ;\ k \geq 1$$

دالة الارتباط الذاتي تتناقص كلما زادت الفجوة الزمنية وتقترب من الصفر أو تكون عبارة عن ترددات تتناقص وتقترب من الصفر، إلا أن هذه الدالة تكون غير كافية في اختبار إستقرارية النموذج، أما دالة الارتباط الجزئي فهي كما لاحظنا سابق في النموذجين من الرتبة 1 والرتبة 2 فهي تنقطع وتصبح تساوي الصفر ونفس الشيء بالنسبة للنموذج *AR(p)*، فهي تنقطع بعد العملية *P*، وهو ما يساعد على تحديد رتبة النموذج.

Advanced Time Series Analysis

الفصل الرابع: نماذج السلاسل الزمنية العشوائية

Stochastic Time Series Models

الدرس 13

13th Course

المبحث 02: نموذج المتوسطات المتحركة *Moving Averages Model*

1- نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى *MA(1)*

2- نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية *MA(2)*

3- نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة q *MA(q)*

المبحث 02: نموذج المتوسطات المتحركة *Moving Averages Model*

سيتم التطرق في هذا المحور من الدراسة إلى نوع ثاني من النماذج المتداولة في العرف الإحصائي وهو نموذج المتوسطات المتحركة والذي يرمز له عادة *MA(q)*، حيث *q* تعبر عن رتبة النموذج وتتراوح قيمتها عادة بين 2 إلى 3 في المجالات الاقتصادية والمالية والبيئية. لتبسيط التحليل سنبدأ بالنموذج من الرتبة الأولى ثم الرتبة الثانية والنموذج من الرتبة *q* (العام).

1- نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى $MA_{(1)}$:

تكتب الصيغة العامة لنموذج المتوسطات المتحركة في مجال تحليل السلاسل الزمنية كالتالي:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

حيث $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ معلمات النموذج و ε الضجيج الأبيض (الاضطرابات الهادئة).

نموذج $MA_{(1)}$ هو الصورة المبسطة للنموذج ويأخذ الصورة التالية:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \quad ; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

حيث: $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$، أي أن الضجيج الأبيض ε ذو متوسط 0 وتباين σ^2 (عملية Gauss).

هذا النموذج يرتكز على العمليات التاريخية الحد العشوائي في تحليل السلسلة Y_t، بدلا من قيم التاريخية للسلسلة نفسها، وهو ما جعل البعض يعتمد هذا النموذج في مجالات إدارة الجودة وقياس نسب التلوث وحالات الحروب والاضطرابات العمالية وغيرها، أين يكون للعامل العشوائي دور رئيسي في اتخاذ القرار.

كما يمكن أن يكتب النموذج $MA_{(1)}$ باستخدام مؤثر المتوسطات المتحركة الذي سبق التطرق إليه على النحو التالي:

$$Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

حيث:

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L$$

رغم أن هذا النموذج يعتمد على الضجيج الأبيض ε_t والذي يخضع لعميلة *Gauss* كما ذكرنا، حيث توقعه صفر وتباينه σ^2، وبالتالي يفترض أن يكون نموذجا مستقرا، إلا أن التأكد من توفر شروط إستقراريته ضروري شأنه شأن النموذج السابق ولهذا سنكتفي

- **شروط إستقرارية النموذج $MA_{(1)}$**

يتم التأكد من إستقرارية النموذج من خلال الأدوات الإحصائية التالية:

التوقع:

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) = 0 \quad ; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

حسب قاعدة Gauss فإن توقع الضجيج ε يساوي الصفر.

التغاير:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2})$$
$$\Rightarrow \gamma(1) = -\theta_1\sigma^2$$
$$Cov(Y_t, Y_{t-2}) = Cov(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3})$$
$$\Rightarrow \gamma(2) = 0$$

وكذلك الحال بالنسبة لبقية الفجوات الزمنية، أي عند: $k = 3, 4, \dots$ يكون التغاير:

$$\gamma(3) = \gamma(4) = \dots = 0$$

التباين:

$$Var(Y_t) = Var(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}) = Var(\varepsilon_t) + \theta^2 Var(\varepsilon_{t-1})$$
$$= \sigma^2(1+\theta_1^2) = \gamma(0)$$

ما يلاحظ أن كل من التوقع والتغاير والتباين عبارة عن ثوابت لا تتأثر بالزمن t، وبالتالي فإن النموذج مستقر.

- **دالة الارتباط الذاتي للنموذج $ACF\ for\ MA_{(1)}$**

دالة الارتباط الذاتي كما هو معلوم تساوي قيمة التغاير إلى تباين النموذج، ويمكن كتابة دالة الإرتباط لهذا النموذج كالتالي:

$$\rho(k) = \begin{cases} -\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & ;\ k = 1 \\ 0 & ;\ k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

الملاحظ على دالة الارتباط الذاتي للنموذج $MA_{(1)}$ أنها تنقطع بعد الفجوة الزمنية الأولى، وهو ما يؤكد ترابط قيم السلسلة Y_t التي تبعد عن بعضها البعض بوحدة زمنية، أما القيم التي تبعد عن بعضها البعض بأكثر من فجوة زمنية فهي غير مترابطة. كما أن الارتباط الذاتي $\rho(k) > 0$ عند θ *سالبة* وتكون $\rho(k) < 0$ عند θ موجبة.

- **دالة الارتباط الذاتي الجزئي للنموذج $PACF\ for\ MA_{(1)}$**

دالة الارتباط الذاتي الجزئي كما أوضحنا في فقرات سابقة ϕ_{kk} ومن خلال معادلات *Yule*–Walker هو عبارة عن حاصل قسمة محدد المصفوفة Δ' على المصفوفة Δ، أي:

$$\phi_{kk} = \frac{\Delta'}{\Delta} \qquad ;\ k = 2, 3, 4, \dots$$

كما نعلم من معادلات Yule–Walker أن:

$$\rho(k) = \phi_{k1}\rho(k-1) + \phi_{k2}\rho(k-2) + \dots + \phi_{kk}\rho(0)$$

كما نعلم أن الارتباط الذاتي لنموذج $MA_{(1)}$.

$$\rho(1) = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

ومنه تكون:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & 0 & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & 0 \\ 0 & \rho(1) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & 0 & \dots & 0 \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & 0 \\ 0 & \rho(1) & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \rho(1) \\ 0 & 0 & 0 & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}}$$

وباستخدام معادلة الفروق من الدرجة الثانية بالنسبة للبسط Δ' والمقام Δ نحصل على النتيجة التالية:

$$\boldsymbol{\phi_{kk} = -\frac{\theta_1^k\left(1-\ \theta_1^2\right)}{1-\ \theta_1^{2(k+1)}}\quad ; k = 1, 2, \dots}$$

حيث:

$$\left|\phi_{kk}\right| < \ \theta_1^k \qquad ; \theta_1 < 1$$

ما يلاحظ على دالة الارتباط الجزئي ϕ_{kk} لنموذج $MA_{(1)}$ تكون متغيرة بين السالبة والموجبة عند θ سالبة، وذلك حسب قيمة k، وتكون ϕ_{kk} سالبة عند θ موجبة.

<u>**ملاحظة هامة:**</u> إذا كانت $\left|\phi_1\right| < 1$ نقول أن النموذج (العملية) $MA_{(1)}$ قابل للانعكاس Invertible، ومن خصائص الانعكاس:

– أن قيمة السلسلة Y_t تتأثر بماضي قيمها مع إعطاء أهمية أكثر للبيانات الأكثر حداثة، أي أن الأهمية متعاكسة مع الزمن.

– عملية الانعكاس تضمن وجود نموذج بمعلمات محددة.

مثال توضيحي: لتكن لدينا السلسلة الزمنية التالية:

$$Y_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$$

أحسب معاملات الارتباط الذاتي والارتباط الجزئي للسلسلة عند: $k = 1, 2, 3, 4$، ثم أرسم الدالتين ACF و PACF للسلسلة.

الحـــل:

– **معامل الارتباط الذاتي:** $k = 1$; $\rho(k) = -\frac{-0.6}{1+0.36} = \mathbf{0.44}$

$\rho(k) = \mathbf{0}$; $k = 2, 3, \dots$

معامل الارتباط بين قيمة السلسلة Y_t و Y_{t-1} *يساوي* 0.44، أما مع باقي قيم السلسلة فلا يوجد ارتباط.

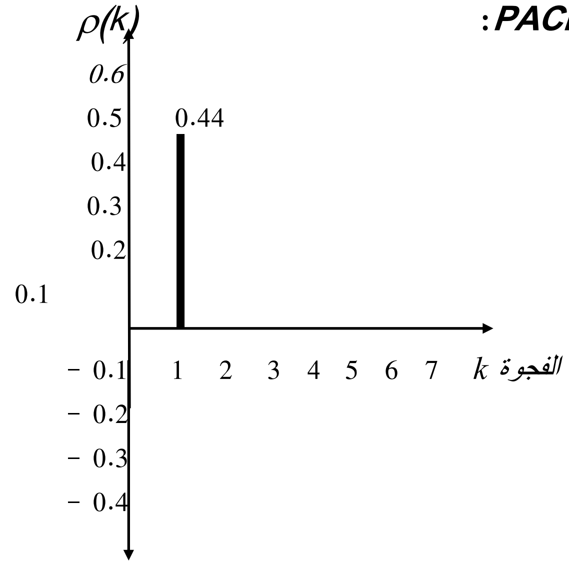
– **معامل الارتباط الذاتي الجزئي:** الارتباط الجزئي بالنسبة لنموذج $MA_{(1)}$ لا ينقطع بعد الفجوة الزمنية الأولى وهذا على عكس نموذج الانحدار الذاتي $AR_{(1)}$ إلا أنه تحده الدالة الآسية θ_1^k كما هو مبين في الجدول التالي:

الجدول 17: قيم ACF وPACF للمثال التوضيحي

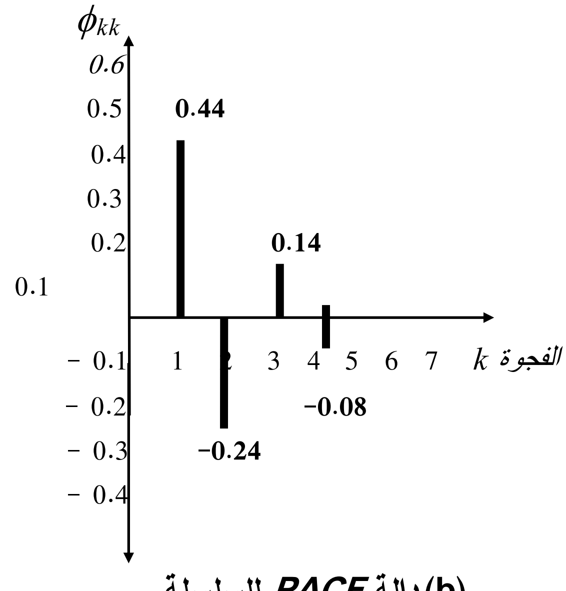
k	1	2	3	4
ϕ_{kk}	0.44	-0.24	0.14	-0.08
θ_1^k	-0.6	0.36	-0.21	0.12
$\lvert\phi_{kk}\rvert$	0.44	0.24	0.14	0.08
$\lvert\theta_1^k\rvert$	0.6	0.36	0.21	0.12

ما يلاحظ عن الجدول أن قيم ϕ_{kk} متذبذبة بين الموجبة والسالبة، كما أن $\lvert\phi_{kk}\rvert$ تتناقص لكن اقل من الدالة لآسية $\lvert\theta_1^k\rvert$ للفجوات الزمنية من 1 إلى 4، لكنهما يتقاطعان عند قيمة معينة لـ $k > 4$.

- **رسم الدالتين ACF وPACF:**



(a) دالة ACF للسلسلة



(b) دالة PACF للسلسلة

الشكل 21: دالتي ACF وPACF (للمثال التوضيحي)

ما يلاحظ أن دالة الارتباط الذاتي تنقطع بعد الفجوة الزمنية الأولى في نموذج $MA_{(1)}$ ودالة الارتباط الذاتي الجزئي لا تنقطع بل تتناقص قيمتها وتقترب من الصفر وتكون في شكل ارتدادات عند $0 < \theta$ كما تتناقص بشكل تدريجي عند $0 > \theta$.

ملاحظة هامة: يستنتج من التحليل السابق أن دالة الارتباط الذاتي *ACF* هي التي تساعد على تحديد الرتبة في نموذج $MA_{(1)}$، أما دالة الارتباط الذاتي الجزئي *PACF* فهي التي تحدد الرتبة في نموذج $AR_{(1)}$.

2– نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية $MA_{(2)}$

يعتبر نموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الثانية من أكثر النماذج استخداما، خاصة في تقدير المؤشرات الاقتصادية والمالية بعد حدوث الأزمات أو هزات فجائية لم تكن متوقعة تمتد أثارها لوحدتين زمنيتين، وتكتب الصيغة العامة لهذا النموذج كالتالي:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} \qquad ; t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ويكتب هذا النموذج بصيغة مؤثر المتوسطات المتحركة كالتالي:

$$Y_t = \theta(L)\,\varepsilon_t$$

حيث:

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2$$

كما ذكرنا سابقا، هذا النموذج يعتمد على الضجيج الأبيض ε_t يخضع لعميلة Gauss، حيث توقعه صفر وتباينه σ^2،

- **شروط إستقرارية النموذج $MA_{(2)}$**

يتم التأكد من إستقرارية هذا النموذج وكالعادة من خلال الأدوات الإحصائية التالية:

التوقع:

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) - \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) = 0 \qquad ; \varepsilon \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$$

التغاير:

- **عند الفجوة الزمنية الأولى K=1:**

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3})$$
$$\Rightarrow \quad \gamma(1) = -\theta_1\sigma^2 + \theta_1\theta_2\sigma^2 = \boldsymbol{\theta_1\sigma^2(\theta_2 - 1)}$$

- **عند الفجوة الزمنية الثانية K=2:**

$$Cov(Y_t, Y_{t-2}) = Cov(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} - \theta_2\varepsilon_{t-4})$$
$$\Rightarrow \quad \gamma(2) = \boldsymbol{-\theta_2\,\sigma^2}$$

- **عند الفجوات الزمنية K=3,4, ..:**

$$Cov(Y_t, Y_{t-3}) = Cov(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3} - \theta_1\varepsilon_{t-4} - \theta_2\varepsilon_{t-5})$$

$$\Rightarrow \qquad \gamma(3) = 0 = \gamma(4) = \ldots$$

أي أن التغاير يصبح يساوي الصفر بعد الفجوة الزمنية الثانية لهذا النموذج.

التباين:

$$Var(Y_t) = Var(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}) = \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 + \theta_2^2\sigma^2$$

$$Var(Y_t) = \gamma(0) = \boldsymbol{\sigma^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}$$

ما يستنتج أن كل من التوقع، التغاير والتباين لا تعتمد على الزمن وبالتالي نستطيع القول أن هذا النموذج مستقر.

- **دالة الارتباط الذاتي للنموذج $ACF\ for\ MA_{(2)}$**

دالة الارتباط الذاتي تساوي التغاير إلى تباين النموذج، ويمكن كتابة دالة الارتباط الذاتي للنموذج $MA_{(2)}$ كالتالي:

$$\rho(k) = \begin{cases} \dfrac{\theta_1(\theta_2-1)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & ;\ k=1 \\ \dfrac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & ;\ k=2 \\ 0 & ;\ k=2,\ 3,\ \ldots \end{cases}$$

الملاحظ على دالة الارتباط الذاتي للنموذج $MA_{(2)}$ أنها تنقطع بعد الفجوة الزمنية الثانية، وهو ما يؤكد ترابط قيم السلسلة Y_t التي تبعد عن بعضها البعض بوحدتين زمنيين، أما القيم التي تبعد عن بعضها البعض بأكثر من فجوتين فهي غير مترابطة.

- **دالة الارتباط الذاتي الجزئي للنموذج $PACF\ for\ MA_{(2)}$**

دالة الارتباط الذاتي الجزئي كما أوضحنا في فقرات سابقة ϕ_{kk} ومن خلال معادلات *Yule*–Walker هو عبارة عن حاصل قسمة محدد المصفوفة Δ' على المصفوفة Δ، أي:

$$\phi_{kk} = \frac{\Delta'}{\Delta} \qquad ;\ k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

$$\phi_{kk} = \rho(k) = \frac{\theta_1(\theta_2-1)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} \qquad ;\ k=1$$

وتشبه دالة الارتباط الذاتي للنموذج $MA_{(2)}$ تلك في نموذج AR، فهي إما تتناقص بتذبذبات أو تتناقص تدريجي وتؤول إلى الصفر.

مثال توضيحي: لتكن لدينا السلسلة التالية:

$$Y_t = \varepsilon_t - 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2}$$

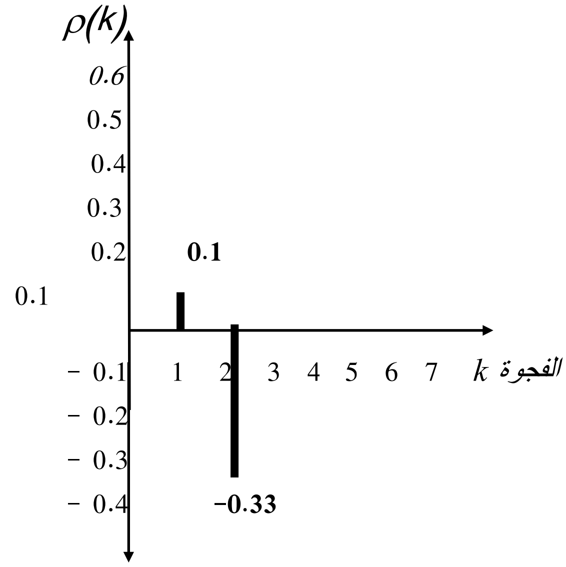
- أحسب الارتباط الذاتي $\rho(1)$ و $\rho(2)$ للسلسلة

- أرسم دالة *ACF* للنموذج.

الحــــل: − حساب $\rho(1)$ و $\rho(2)$ للسلسلة:

$$\rho(k=1) = \frac{-0.2(0.4-1)}{1+0.04+0.16} = \mathbf{0.1}$$

$$\rho(k=2) = \frac{-0.4}{(1+0.04+0.16)} = \mathbf{-0.33}$$



الشكل 22: دالة *ACF* للسلسلة.

الملاحظ عن الدالة *ACF* لنموذج $MA_{(2)}$ أنها تارة تكون سالبة وتارة تكون موجبة، ألا أنها تنقطع بعد الفجوة الزمنية الثانية، أي: $\rho(k>2)=0$.

<u>ملاحظة هامة:</u> إذا كانت $|\phi_2| < 1$ و $|\phi_1| + \theta_2 < 1$ يكون النموذج (العملية) $MA_{(2)}$ قابل للانعكاس Invertible.

3− نموذج المتوسطات المتحركة من الرتب *q* *MA(q)*

النموذج العام للمتوسطات المتحركة يكون من رتبة محددة وهي *q* يكتب على النحو التالي:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \qquad ; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

حيث $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ معلمات النموذج و ε_t الضجيج الأبيض (الاضطرابات الهادئة) والذي يخضع لعملية Gauss كما ذكرنا سابقا.

تعتبر عمليات المتوسطات المتحركة ساكنة كما ذكرنا سابق لأن $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0,\sigma^2)$ وهو المتغير المعتمد عليها في تحديد أو تقدير قيمة السلسلة Y_t.

ويكتب هذا النموذج بصيغة مؤثر المتوسطات المتحركة كالتالي:

$$Y_t = \theta(L)\,\varepsilon_t$$

حيث:
$$\theta(L) = 1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

- **خصائص النموذج *MA(q)*:**

- **التوقع:** المتوسط الحسابي للنموذج العام يساوي الصفر، أي:

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) - \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) - \dots - \theta_q E(\varepsilon_{t-q}) = 0$$

- **التباين:**

$$Var(Y_t) = Var(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q})$$
$$= \sigma^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2+ \dots +\theta_q^2)$$

- **دالة الارتباط الذاتي للنموذج:**

$$\rho(k) = \frac{-\theta_k \sum_{i=1}^{q-k}\theta_i\theta_{i+k}}{1+\sum_{i=1}^{q}\theta_i^2} \qquad ; q \geq k.$$
$$\rho(k) = 0 \qquad ; k > q$$

- **انعكاس نموذج (عملية) *MA(q)*: *Invertibility of an MA(q) Model (Processes)***

انعكاس عمليات المتوسطات المتحركة تعني أن السلاسل اللامنتهية يمكن أن تنتهي أو تتلاقى بقيمة منتهية، للتبسيط نأخذ صيغة النموذج $MA_{(1)}$ التالية:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \qquad ; t = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

ومنه:

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} = Y_t + \theta_1(Y_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2})$$
$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2\varepsilon_{t-2}$$

وعند مد العملية أو السلسلة إلى n فترة زمنية سابقة نحصل على:

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \theta_1^3 Y_{t-3} + \dots + \theta_1^n Y_{t-n} + \theta_1^{n+1}\varepsilon_{t-n-1}$$
$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{n}\theta_1^i Y_{t-i} + \theta_{t-i-1}^{i+1}$$

أي أن:
$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \theta_1^3 Y_{t-3} + \dots + \theta_1^n Y_{t-n} = \sum_{i=1}^{\infty}\theta_1^i Y_{t-i}$$

ومنه:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 Y_{t-1} - \theta_1^2 Y_{t-2} - \theta_1^3 Y_{t-3} - \dots - \theta_1^n Y_{t-n} = \boldsymbol{\varepsilon_t - \sum_{i=1}^{\infty}\theta_1^i Y_{t-i}}$$

نستنتج مما تم التوصل إليه أنه إذا كانت $|\phi_1| < 1$ فإن القيمة اللامنتهية للسلسلة Y_t ستؤول إلى قيمة محددة، وهو شرط الانعكاس بالنسبة لنموذج *MA(q)*، لهذا يمكن القول أن النموذج العام يحتوي على عمليات متوسطات متحركة مستقرة.

Advanced Time Series Analysis

الفصل الرابع: نماذج السلاسل الزمنية العشوائية

Stochastic Time Series Models

الدرس 14

14^{th} Course

المبحث 03: نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة *ARMA Model*

1- نموذج $ARMA_{(1, 1)}$

المبحث 03: نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة *ARMA Model*

سيتم التطرق في هذا المحور إلى نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة لما لهذا النموذج من أهمية في تفسير وتحليل السلاسل الزمنية، إضافة إلى تقدير القيم المستقبلية لهذه السلاسل، ويتكون النموذج *ARMA* من جزأين، جزء يتعلق بعمليات الانحدار الذاتي *(AR)* وجزء يتعلق بالمتوسطات المتحركة (الضجيج الأبيض) *(MA)*، ويقال عن النموذج *ARMA(p,q)* بأنه نموذج انحدار ذاتي برتبة *p* ومتوسطات متحرك برتبة *q*، ويستخدم هذا النموذج عادة في التطبيقات العملية ذات البيانات التي تتأثر بالقيم التاريخية وبالضجيج الأبيض (الاضطرابات الهادئة)، كبيانات الاستهلاك الفردي، بيانات الطلب الفردي، بيانات الإنتاج في أوقات الأزمات ...ألخ، وسوف يتم التطرق بنوع من التفصيل إلى النموذج المبسط $ARMA_{(1,1)}$ والنموذج العام $ARMA(p,q)$.

1- نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة $ARMA_{(1,1)}$

يأخذ النموذج المبسط $ARMA_{(1,1)}$ الصيغة التالية:

$$Y_t = \varepsilon_t + \phi Y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-1} \qquad ; t= \pm 1, \pm 2, \ldots$$

حيث: ϕ و θ معلمتي النموذج و Y_t سلسلة (العملية) مختلطة.

ويكتب النموذج بصيغة المؤثر حيث:

$$Y_t - \phi Y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

أي أن:

$$\phi(L)\, Y_t = \theta(L)\, \varepsilon_t$$

حيث: $\phi(L) = 1 - \phi L$ و $\theta(L) = 1 - \theta L$.

يكون نموذج $ARMA_{(1,1)}$ مستقر عندما تكون $|\phi| < 1$، كما يمكن التعبير عن هذا النموذج من خلال عمليات المتوسطات المتحركة برتبة متناهية كما يلي:

$$\psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \ldots$$

وحيث أن: $\psi(L) = \frac{1-\theta L}{1-\phi L} = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}$

منه:

$$\psi(L)(1-\phi L) = 1-\theta L$$

$$\psi(L)\,(1-\phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots) = 1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots$$

$$\Rightarrow (1+\psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots)(1-\phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots) = 1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots$$

$$\Rightarrow (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots) = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots)/(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots)$$

بمساواة معاملات L في الطرفين نحصل على الآتي:

$$\psi_1 = \phi - \theta$$

$$\psi_2 = \phi\psi_1 = \phi(\phi - \theta)$$

وعند التعميم على كل الرتب نحصل على الآتي:

$$\boldsymbol{\psi_i = \phi^{i-1}(\phi - \theta)} \quad ; i = 1, 2, \ldots$$

وتتحقق خاصية الانعكاس لنموذج $ARMA_{(1,1)}$ عند $|\theta| < 1$، ويمكن التعبير عنها من خلال عمليات الانحدار الذاتي من رتبة لا متناهية كما يلي:

$$\pi(L) = 1 + \pi_1 L + \pi_2 L^2 + \pi_3 L^3 + \ldots$$

وحيث أن: $\pi(L) = \frac{1-\theta L}{1-\phi L} = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}$

وعند نشر المعادلة بالطريقة السابقة نحصل على:

$$\pi_1 = \phi - \theta$$

$$\pi_2 = \theta\psi_1 = \theta(\phi - \theta)$$

وعند التعميم على كل الرتب نحصل على الآتي:

$$\boldsymbol{\pi_j = \theta^{j-1}(\phi - \theta)} \quad ; j = 1, 2, \ldots$$

- **خصائص نموذج $ARMA_{(1,1)}$**

نعرض في ما يلي الخصائص الإحصائية لنموذج:

التوقع:

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t + \phi Y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-1}) = \boldsymbol{\phi E(Y_{t-1})}$$

يكون النموذج مستقر من حيث المتوسط إذا كانت $|\phi| < 1$.

التغاير:

- عند الفجوة الزمنية الأولى ، أي: $k=1$:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t + \phi Y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-1}, Y_{t-1}) = \gamma(1) = \boldsymbol{\phi\gamma(0) - \theta\sigma^2}$$

- عند الفجوة الزمنية الثانية، أي: $k=2$:

$$Cov(Y_t, Y_{t-2}) = Cov(\varepsilon_t + \phi Y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-1}, Y_{t-2}) = \gamma(2) = \boldsymbol{\phi\gamma(1)}$$

- عند الفجوة الزمنية k:

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(\varepsilon_t + \phi Y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-1}, Y_{t-k}) = \gamma(k) = \boldsymbol{\phi\gamma(k-1)}$$

التباين:

$$Var(Y_t) = Var(\varepsilon_t + \phi Y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + \phi^2\gamma(0) + \theta^2\sigma^2 - 2\theta\phi\sigma^2$$

ومنه نحصل على صيغة التباين التالية:

$$Var(Y_t) = \gamma(0) = \sigma^2 + \phi^2\gamma(0) + \theta^2\sigma^2 - 2\theta\phi\sigma^2$$

$$\Rightarrow \gamma(0) - \phi^2\gamma(0) = \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 - 2\theta\phi\sigma^2$$

$$\Rightarrow \gamma(0)(1-\phi^2) = \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 - 2\theta\phi\sigma^2$$

$$\boldsymbol{Var(Y_t) = \gamma(0) = \sigma^2[1+\theta^2 - 2\theta\phi]/[1-\phi^2]} \quad ; |\phi| < 1$$

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج** ***ARMA (1,1)***

كما نعلم من التحليل السابق أن دالة الارتباط الذاتي تتأثر بالفجوة الزمنية k وهي حاصل قسمة التغاير على التباين، حيث تساوي عند الفجوة الزمنية الأولى (k =1):

$$\rho(1) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-1})}{Var(Y_t)} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\theta})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\phi\theta})}{\mathbf{1} + \boldsymbol{\theta}^2 - \mathbf{2}\boldsymbol{\theta\phi}}$$

- عند الفجوة الزمنية الثانية (k =2):

$$\rho(2) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-2})}{Var(Y_t)} = \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} = \phi\frac{(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\theta})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\phi\theta})}{\mathbf{1} + \boldsymbol{\theta}^2 - \mathbf{2}\boldsymbol{\theta\phi}} = \boldsymbol{\phi\rho(1)}$$

- عند الفجوة الزمنية k:

$$\rho(k) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{Var(Y_t)} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \boldsymbol{\phi\rho(k-1)}$$

كما يمكن كتابة دالة الارتباط الذاتي عند الفجوة k كالتالي:

$$\rho(k) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{Var(Y_t)} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \boldsymbol{\phi^{k-1}\rho(1)} \; ; \; k = 2,3, \ldots$$

وعموما يمكن تلخيص ما سبق كالتالي:

$$\rho(k) = \begin{cases} \frac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1+\theta^2-2\theta\phi} & ; k=1 \\ \phi^{k-1}\rho(1) & ; k=2, 3, \ldots \end{cases}$$

ما يمكن ملاحظته على دالة الارتباط الذاتي للنموذج أنها تعتمد على الارتباط الذاتي بين قيمتي السلسلة الزمنية Y_t و Y_{t-1} وقيمة ϕ، فإذا كانت $\phi > \theta$، فإن $\rho(k)$ تكون موجبة وتتناقص تدريجيا إلى أن تقترب من الصفر، أما إذا كانت $\phi < \theta$ فإن $\rho(k)$ تكون تارة موجبة وتارة سالبة وتتناقص تدريجيا إلى أن تقترب من الصفر.

<u>مثال توضيحي:</u> لتكن لدينا الدالة التالية:

$$Y_t = e_t + 0.8Y_{t-1} - 0.3e_{t-1}$$

حيث: e_t القيمة التقديرية لـ ε_t.

- أوجد دالة الارتباط الذاتي للنموذج $ARMA((1,1)$ عند الفجوات الزمنية k =1,2,3,4؛
- قارن بينها وبين دالتي الارتباط الذاتي للنموذجين $AR(1)$ و $MA(1)$.

الحــــل:

- إيجاد دوال الارتباط الذاتي للنماذج الثلاث:

- **دالة الارتباط الذاتي للنموذج $ARMA_{(1,1)}$:**

$$\rho(1) = \frac{(0.8-0.3)(1-(0.8)(0.3))}{1+0.3^2-2(0.8)(0.3)} = 0.62$$

$$\rho(2) = \phi\rho(1) = 0.8 \text{ x } 0.62 = 0.49$$

$$\rho(3) = \phi\rho(2) = 0.8 \text{ x } 0.49 = 0.39$$

$$\rho(4) = \phi\rho(3) = 0.8 \text{ x } 0.39 = 0.31$$

ما يلاحظ أن الدالة تتناقص كلما زادت الفجوة الزمنية، وهو ما يعبر عن إستقراريتها.

- **دالة الارتباط الذاتي للنموذج $AR_{(1)}$ (ويكتب أيضا $ARMA_{(1,0)}$):**

نعلم أن دالة الارتباط الذاتي لنموذج $AR_{(1)}$ هي:

$$\rho(k) = \phi^k \qquad ; k=1\ 2,\ 3,\ \ldots$$

وعليه:

$$\rho(1) = 0.8$$
$$\rho(2) = 0.64$$
$$\rho(3) = 0.51$$
$$\rho(4) = 0.41$$

ما يلاحظ أن الدالة تتناقص كلما زادت الفجوة الزمنية، لكن يكون الارتباط الذاتي أكبر مقارنة من النموذج السابق.

- **دالة الارتباط الذاتي للنموذج $MA_{(1)}$ (ويكتب أيضا $ARMA_{(0,1)}$):**

من التحليل السابق تم التوصل إلى أن دالة الارتباط الذاتي للنموذج $MA_{(1)}$ هي كالتالي:

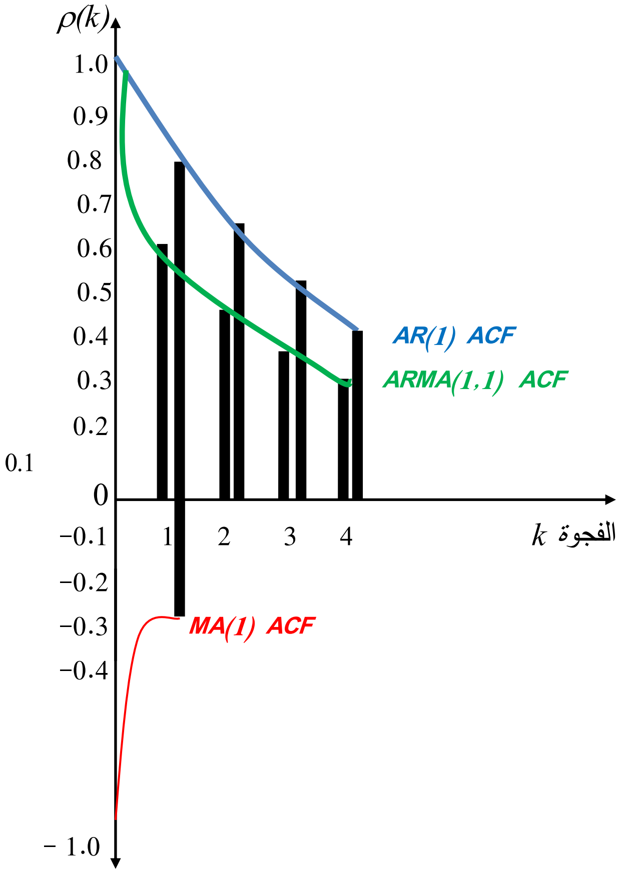
$$\rho(k) = \begin{cases} -\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & ; k=1 \\ 0 & ; k=2,3,\ldots \end{cases}$$

ومنه:

$$\rho(1) = -0.3/(1+0.09) = -0.27$$
$$\rho(2) = 0$$
$$\rho(3) = 0$$
$$\rho(4) = 0$$

ما يلاحظ أن دالة الارتباط الذاتي لنموذج $MA_{(1)}$ تنقطع بعد الفجوة الزمنية الأولى.

- لتبسيط عملية المقارنة يتم رسم الدوال الثلاث في الشكل التالي:



الشكل 23: دوال الارتباط الذاتي لنماذج $AR_{(1)}$، $MA_{(1)}$ و$ARMA_{(1,1)}$ (حسب المثال)

ما يلاحظ أن منحنى الارتباط الذاتي لنموذج $ARMA_{(1,1)}$ يتناقص بشكل آسي ابتداء من $\rho(0)$ بينما نجد أن منحنى الارتباط الذاتي لنموذج $AR_{(1)}$ يتناقص ويكون أكثر انحدارا ابتداء من $\rho(1)$، أما بالنسبة لنموذج $MA_{(1)}$ فيتزايد بشكل آسي من $\rho(0)$ إلى $\rho(1)$ ثم ينقطع، وكنتيجة لما تقدم يمكن تأكيد التقارب بين النموذجين $ARMA_{(1,1)}$ و $AR_{(1)}$.

Advanced Time Series Analysis

الفصل الرابع: نماذج السلاسل الزمنية العشوائية

Stochastic Time Series Models

الدرس 15

15th Course

المبحث 03 (تابع): نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة *ARMA Model*

2- نموذج *ARMA(p,q)*

2- نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة $ARMA(p,q)$

يأخذ النموذج العام المختلط للانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة الصيغة التالية:

$$Y_t = \varepsilon_t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_1 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

أي:

$$Y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

قيم السلسلة (العملية)Y_t تتكون من مجموعتين من المتغيرات المفسرة، المجموعة الأولى تتكون من القيم التاريخية للسلسلة وتسمى بمجموعة الانحدار الذاتي والمجموعة الثانية تتكون من القيم التاريخية للضجيج الأبيض (الاضطرابات الهادئة) وتسمى بمجموعة المتوسطات المتحركة، ويمكن التعبير عن السلسلة أو النموذج باستخدام المؤثر إلى الخلف L كالتالي:

$$\phi(L)\, Y_t = \theta(L)\, \varepsilon_t$$

حيث $\phi(L)$ كثيرة الحدود من الرتبة p، أي:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \phi_3 L^3 - \ldots - \phi_p L^p$$

$\theta(L)$ كثيرة الحدود من الرتبة q، أي:

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \theta_3 L^3 - \ldots - \theta_q L^q$$

يكون النموذج $ARMA(p,q)$ ساكن إذا كان جذور المعادلة $\phi(L)=0$ تقع كلها خارج دائرة الوحدة، ويمكن التعبير عن سكونها من خلال عمليات المتوسطات المتحركة ذات الرتبة ما لا نهائية، أي:

$$Y_t = \psi(L)\, \varepsilon_t$$

حيث:

$$\psi(L) = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}$$

كما يكون النموذج $ARMA(p,q)$ منعكس إذا كان جذور المعادلة $\theta(L)=0$ تقع كلها خارج دائرة الوحدة، ويمكن التعبير عن الانعكاس من خلال عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة اللانهائية، أي:

$$\varepsilon_t = \pi(L)\, Y_t$$

حيث:

$$\pi(L) = \frac{\phi(L)}{\theta(L)}$$

ويتم الحصول على قيم الأوزان ψi وπj بمساواة معادلتي السكون والانعكاس كما لاحظنا ذلك في نموذج $ARMA(1,1)$ السالف الذكر.

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج $ARMA(p,q)$**

يتم الحصول على دالة الارتباط الذاتي للنموذج $ARMA(p,q)$ من تحليل دالة الارتباط الذاتي لنموذج $ARMA(1,1)$، أي:

$$\rho(1) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-1})}{Var(Y_t)} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{1 + \theta^2 - 2\theta\phi}$$

- عند الفجوة الزمنية الثانية ($k=2$):

$$\rho(2) = \frac{Cov(Y_t,Y_{t-2})}{Var\,(Y_t)} = \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} = \phi\frac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1+\theta^2-2\,\theta\phi} = \phi\rho(1)$$

- عند الفجوة الزمنية k:

$$\rho(k) = \frac{Cov(Y_t,Y_{t-k})}{Var(Y_t)} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \phi\rho(k-1)$$

كما يمكن كتابة دالة الارتباط الذاتي عند الفجوة k كالتالي:

$$\rho(k) = \frac{Cov(Y_t,Y_{t-k})}{Var\,(Y_t)} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \phi^{k-1}\rho(1)\ ;\ k = 2,3,\ \dots$$

ومنه تكون دالة الارتباط الذاتي:

$$\rho(k) = \frac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1+\theta^2-2\,\theta\phi}\ \phi^{k-1} \qquad ;\ k>1$$

- **دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج $ARMA(p,q)$**

تكتب دالة الارتباط الذاتي لسلسلة زمنية مستقرة Y_t كالتالي:

$$\phi_{11} = \rho(1) = corr(Y_1,\ Y_0) \qquad ;\ k=1$$

ومنه:

$$\phi_{kk} = corr(Y_k - f_{k-1},\ Y_0 - f_{k-1}) \qquad ;\ k\geq 2$$

حيث تمثل f دالة لمجموعة قيم السلسلة المفسرة والتي تتوسط القيمتين Y_k وY_0:

$$f_{k-1} = f(Y_{k-1},\ Y_{k-2},\ \dots\ ,\ Y_1)$$

وحتى يكون الارتباط الذاتي بين القيمتين Y_k وY_0 ذو دلالة لابد من تدنية مربع متوسط خطأ التنبؤ، أي:

$$Min\ E(\ Y_k - f_{k-1})$$

وتعتمد دالة الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} بين القيمتين Y_t و Y_{t-k} لأي سلسلة زمنية مستقرة على عزل التأثير الخطي للقيم التي تتوسطهما والممثل بالدالة التالية:

$$f(Y_{t-1},\dots,\ Y_{t-k+1}) = \beta_1 Y_{t-1} + \ \dots\ + \beta_{k-1} Y_{t-k+1}$$

وعموما فإن نموذج $ARMA(p,q)$ القابل للانعكاس هو عبارة عن نموذج انحدار ذاتي لا نهائي $AR(\infty)$ ودالة الارتباط الجزئي للنموذج لا تنقطع عند أي قيمة للفجوة k.

وفي ختام هذا المبحث لابأس أننا نلخص سلوك ACF وPACF للنماذج الثلاث AR، MA و $ARMA$ حسب التحليل السابق في الجدول التالي:

الجدول 18: ACF وPACF للنماذج: AR، MA و $ARMA$

	$AR(p)$	$MA(q)$	$ARMA(p,q)$
دالة ACF	تتناقص وتقترب من 0	تنقطع بعد الرتبة q	تتناقص وتقترب من 0
دالة $PACF$	تنقطع بعد الرتبة p	تتناقص وتقترب من 0	تتناقص وتقترب من 0

Advanced Time Series Analysis

الفصل الرابع: نماذج السلاسل الزمنية العشوائية

Stochastic Time Series Models

الدرس 16 (القادم)

16th Course (Next)

المبحث 04: نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية *ARIMA Model*

Autoregressive Integrated Moving Averages Model

المبحث 04: نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية *ARIMA Model*