وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف المسيلة

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية

و علوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة

مقدمة لطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية

من إعداد د/ بن يوسف نوة

2020/2021

محتوى البرنامج

المحور الأول: البرمجة الخطية

1-صياغة نموذج البرمجة الخطية:

2-الصيغة العامة للبرمجة الخطية:

3 -مجالات استخدام البرمجة الخطية:

المحور الثاني:طرق حل نماذج البرمجة الخطية

1-الطريقة البيانية:

2-تصنيف القيود:

3 -حالات خاصة للحل في الطريقة البيانية:

4- الحل بطريقة SIMPLEX :

5-طبيعة الموارد في جدول SIMPLEX

المحور الثالث:تحليل الحساسية.

1-تغيرات لها تأثير على العملية :

2-تغيرات لها تأثير على الامثلية :

المحور الأول: البرمجة الخطية

البرمجة الخطية هي تقنية رياضية تبحث عن حل أو حلول لمشكلة اقتصادية سواء كانت إنتاجية، مالية، مسألة نقل، تحليل المشاريع، مباريات الخ ...واختيار أفضل حل من بين الحلول الممكنة والذي يمثل الحل الأمثل. هذه التقنية الرياضية تستعمل خاصة من طرف المسيرين والمشرفين على المشاريع المختلفة لإيجاد الطريقة المثلى لتخصيص موارد المؤسسة المحدودة لاستخدامات مختلفة من أجل تحقيق هدف معين. وهناك عدة أنواع من القيود نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر قيود خاصة بالعملية الإنتاجية، قيود تخزينية، قيود تسويقية

وعلى ضوء هذه القيود، فإن الحل الأمثل الذي يبحث عنه المسير باستعمال تقنيات البرمجة الخطية، هو ذلك الحل الذي يحدد له، كمية الإنتاج الواجب إنتاجها من كل نوع من المنتجات والتي تمكن المؤسسة من تحقيق أقصى ربح ممكن.

1-صياغة نموذج البرمجة الخطية:

حتى نتمكن من وضع برنامج خطي للمعطيات الاقتصادية أو الإدارية أو وضع صيغة رياضية لمسألة البرمجة الخطية، فإنه يجب توفر مجموعة من المتغيرات لها علاقة مباشرة بقيمة الهدف المراد تحقيقه ويحددها السؤال الذي نريد الإجابة عليه عند حل المسألة، وبصفة عامة فإن مسائل البرمجة الخطية تتكون من : مجموعة من المتغيرات، مجموعة معادلات أو متراجحات خطية وتسمى بالقيود، وكذا دالة تسمى بدالة الهدف.

القيود :على المخططين والمسيرين التزامات يجب أخذها بعين الاعتبار أثناء البحث عن الحل الأمثل،لهذا الغرض وضع القيد للإشارة إلى هذه الالتزامات والتقيد بها أثناء البحث عن الحل الأمثل.

دالة الهدف :هذه الدالة تمكننا من التمييز بين حل وحل آخر وعلى ضوءها يتم اختيار الحل الأمثل.

-أسس بناء النموذج الرياضي:

1-أن لا يكون النموذج معقد.

2-أن يكون النموذج معبرا عن المشكلة,وليس العكس أي تطويع المشكلة لتناسب النموذج

3-فهم حدود وقابلية النموذج عند التطبيق بحيث لا يمكن أن يحوي كل المتغيرات وخاصة السياسية والاجتماعية

4-النموذج هو وسيلة وليس الحقيقة نفسها ولا يمكن أن يكون أفضل من المعلومات التي تدخل في تكوينه ولهذا فهو لايحل محل صاحب القرار ابدا .

2-الصيغة العامة للبرمجة الخطية:

ا- دالة الهدف :

$$\text{Min or Max } ZP = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$$

ب- القيود الهيكلية :

Subject to :

$$\begin{array}{l} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \leq , = , \geq b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n \leq , = , \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n \leq , = , \geq b_m \end{array}$$

ج- قيد اللاسلبية :

$$X_1 , X_2 , X_3 , \ldots\ldots , X_n \geq 0$$

أي أن النموذج يشمل ثلاث عناصر أساسية هي دالة الهدف والقيود الهيكلية وقيد عدم السلبية.

إذ أن:

ZP : تمثل قيمة دالة الهدف (تعظيم أو تدنية) .

C : معاملات دالة الهدف (ربح أو كلفة الوحدة الواحدة .... الخ).

X : متغيرات القرار .

A : احتياجات كل وحدة واحدة من الموارد سواء كانت مواد أولية ، الزمن ، عدد العاملين ، .... الخ.

n : عدد المتغيرات.

m : عدد القيود .

b : الموارد المتاحة .

3-مجالات استخدام البرمجة الخطية:

ا-**مشكلة التخصيص:**هنا يتم تثبيت مقدار الكمية التي يجب إنتاجها من كل نوع من المخرجات من اجل مضاعفة الربح ,والهدف هو الوصول إلى اختيار كمية من المدخلات التي إذا ما اختيرت ستحقق أعلى ربحية من خلال بيع المنتج

ب-**مشكلة التثبيت:**هو تثبيت عنصر إنتاج إلى عنصر إنتاج آخر لانجاز أعلى كفاية ممكنة لنظام الإنتاج الذي يحقق أعلى ربحية

ج-**مشكلة التوزيع:** اختيار أفضل الطرائق من اجل الوصول إلى خفض كلف النقل من خلال تحديد الكميات الواجب نقلها من مركز الإنتاج إلى الأسواق

هـ-**مشكلة الجدولة:**هي تعديل المنتجات و جدولتها على مدار السنة لكي يخفض كلفة المواد الأولية والعمل الإضافي والنقل

و-**مشكلة الخلط** :تخفيض كلفة إنتاج مادة معينة فيها صفات الخلط بتحديد الكميات الداخلة في الخلط بحيث تكون العملية بأقل كلفة وأكثر نفع

مثال تطبيقي حول صياغة البرنامج الخطي:

حتى تتمكن من وضع النموذج الخطي بمعطيات اقتصادية او ادراية يجب معرفة مكونات البرنامج، وتتمثل في :

1- دالة الهدف؛ 2- القيود؛ 3-المتغيرات :الوحدات المنتجة او الوحدات المطلوبة.

أ-القيود: على المخطط او المسير التزامات يجب اخذها بعين الاعتبار عند الحل الامثل والتقيد بها .اذا افترض انه توجد 28 ساعة عمل متاحة لدى المؤسسة في الورشة (1) ،وان هذه الورشة تنتج وحدات او منتوج بحيث كل وحدة تتطلب 07 ساعات عمل هذه الورشة ،اذا ما اعطي الرمز X_1 للمنتوج ، وطلب من المسير تحديد كمية X_1 التي يجب انتاجها بالورشة الاولى .رياضيا مكن التعبير عنها :

$$7X_1=28 \quad \text{أي} \quad X_1=4$$

تم استعمال 28 ساعة استعمالا كاملا ، أي الانتاج كان بنسبة مئة بالمئة ، لكن في بعض الاحيان تحدث مشكلة ، يعني هل يمكن انتاج 4 وحدات فعلا ويعود ذلك الى:

-يحدث خلل خلال العملية الانتاجية.

-المادة الاولية المستعملة من اجل انتاج الوحدة.

-العامل (غياب ، توقف، اضراب.....الخ)

هذه العوامل تحدث خلل في العملية الانتاجية ،هذا يعني انه يمكن انتاج 4 وحدات على اساس ساعات العمل المتاحة ،ا انه تم استغلال الطاقة الانتاجية بنسبة مئة بالمئة.

عمليا لا يمكن الوصول الى هذه النسبة لانه توجد عدة عوامل ، تؤثر على العملية الانتاجية ،وبالتالي المتغير الرياضي الاصح : $7X_1 \leq 28$

اذا افترض ان نفس الورشة تنتج منتوجا اخر X_2 بمعدل 4 ساعات عمل للوحدة المنتجة ، يكون التعبير الرياضي كالتالي: $7X_1+4X_2 \leq 28.......(1)$

اذا كانت العملية الانتاجية تتطلب تمرير X_1 و X_2 على ورشة ثانية من اجل ان تكون المنتوجات جاهزة الاستعمال واذا كانت الطاقة الانتاجية للورشة (2) 20 ساعة عمل .

وان وحدة واحدة من X_1 تتطلب 4 ساعات عمل ووحدة من X_2 تتطلب 5 ساعات عمل من هذه الورشة ، فالتعبير الرياضي يكون كالتالي : $4X_1+5X_2 \leq 20 ....(2)$

اذاكان الطلب اليومي من الوحدات X_2 لا يتجاوز 3 وحدات ،فالتعبير الرياضي:

$$X_2 \leq 3.......(3)$$

ب–دالة الهدف : بالرغم من ان المتراجحة السابقة تعطي للمسير ، فكرة كاملة عن الشروط التي يجب توفرها وتقيد المؤسسة ساعات عمل متاحة للمنتوجين X_1 و X_2 الا ان البرنامج ينقصه معيار المفاضلة بين الحلول الممكنة لـ X_1 و X_2

اذا افترضنا ان المؤسسة تبحث عن تحقيق اكبر ربح وان كل وحدة من X_1 تحقق بها ربحا قدره وحدتين نقديتين ، وان كل وحدة من X_2 تحقق ربحا قدره 3 وحدرات نقدية ، اذا اعطي لدالة الهدف الرمز z_p فان الصيغة الرياضية لدالة الهدف هي: $Zp= 2 X_1 +3 X_2$

حيث ان دالة الهدف هي تعظيم الربح فان الصيغة النهائية تكون :

$$\text{Max } Zp= 2 X_1 +3 X_2$$

وبهذا نكون قد وصلنا الى تكوين النموذج الخطي باستعمال المعطيات السابقة:

$$\text{Max } Zp=2X1+3X2$$

St:

$7X1+4X2 \leq 28.......$(قيد1)

$4X1+5X2 \leq 20.......$(قيد2)

$X2 \leq 3.......$(قيد3)

$X1,X2 \geq 0.......$(شرط اللاسلبية)

المحور الثاني:طرق حل نماذج البرمجة الخطية

بعد صياغة المشكلة على شكل نموذج رياضي فأن المرحلة التالية هي محاولة الحصول على حل للمشكلة من النموذج الممثل لها حيث يعرف الحل انه مجموعة قيم المتغيرات المسيطر عليها والتي تؤدي إلى فعالية أفضل للنظام وفقاً للظروف والقيود الموضوعة على المشكلة،في بعض الأحيان لايمكن الحصول على حل للمشكلة من النموذج الممثل لها حيث يعرف الحل انه مجموعة قيم المتغيرات المسيطر عليها والتي تؤدي إلى فعالية أفضل للنظام وفقا للظروف والقيود الموضوعة على المشكلة. وفي بعض الأحيان لا يمكن الحصول على الحل بالطرق الرياضية الحتمية وهي التي سيتحصل منها تحت ظروف مؤكدة وفي مثل هذه الحالات يستخرج الحل بالطرق الاحتمالية أو بطرق المحاكاة.

وهناك طريقتان أساسيتان لحل نماذج البرمجة الخطية

1- الطريقة البيانية

2- الطريقة البسيطة simplex

1-الطريقة البيانية:

1-تصلح هذه الطريقة لحل مشاكل البرمجة الخطية والتي تحتوي على متغيرين اثنين فقط

2-تستخدم هذه الطريقة إذا كانت المتغيرات مقيدة أو غير مقيدة بالإشارة

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية

الخطوات

1- نحول القيود من المتراجحات إلى معادلات

2- إيجاد نقاط التقاطع لكل معادلة حيث نعوض بأحد المتغيرات في المعادلة الواحدة بقيمة صفر لاستخراج قيمة المتغير الثاني، ثم نكرر ذلك بالنسبة للمتغير الآخر، وبذلك تصبح لدينا نقطتين لكل معادلة(مستقيم) وبوساطة هاتين النقطتين يمكن رسم المستقيم الذي تمثله المعادلة.

3- رسم المستقيمات و إيجاد منطقة الحلول الممكنة(المنطقة التي تحقق فيها متغيرات القرار جميع القيود في آن واحد).

4- تحديد نقاط الأركان لمنطقة الحلول الممكنة (إيجاد إحداثيات هذه النقاط).

5- التعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف واختيار النقطة التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن ،تكون هي التي تمثل الحل الأمثل إذا كانت دالة الهدف من نوع التعظيم Max والعكس بالعكس أي أن النقطة التي

تجعل دالة الهدف اقل ما يمكن في حالة كون دالة الهدف من النوع المتدني Min هي التي تمثل الحل الأمثل .

<u>مثال تطبيقي:</u>

$$\text{Max} \quad Zp=6X1+4X2$$

St:

$5X1+5X2 \le 30$.......(قيد1)

$-X1+X2 \le 4$.......(قيد2)

$X2 \le 2$.......(قيد3)

$X1,X2 \ge 0$.......(شرط اللاسلبية)

أولا: إيجاد منطقة الحلول الممكنة

رسم المتراجحات (1) إلى (3) ، أما المتراجحة (4) فتمثل اللاسلبية ، أي أخذ النقاط في الربع الأول الموجب فقط لكل متراجحة.

-تحويل المتراجحات إلى معادلات:

$5X1+5X2 \le 30$.......(المعادلة1)

$-X1+X2 \le 4$.......(المعادلة2)

$X2 \ge 2$.......(المعادلةد3)

-إيجاد نقاط التقاطع لكل معادلة:

(1)

X1	0	6
X2	6	0

(2)

X1	0	-4
X2	4	0

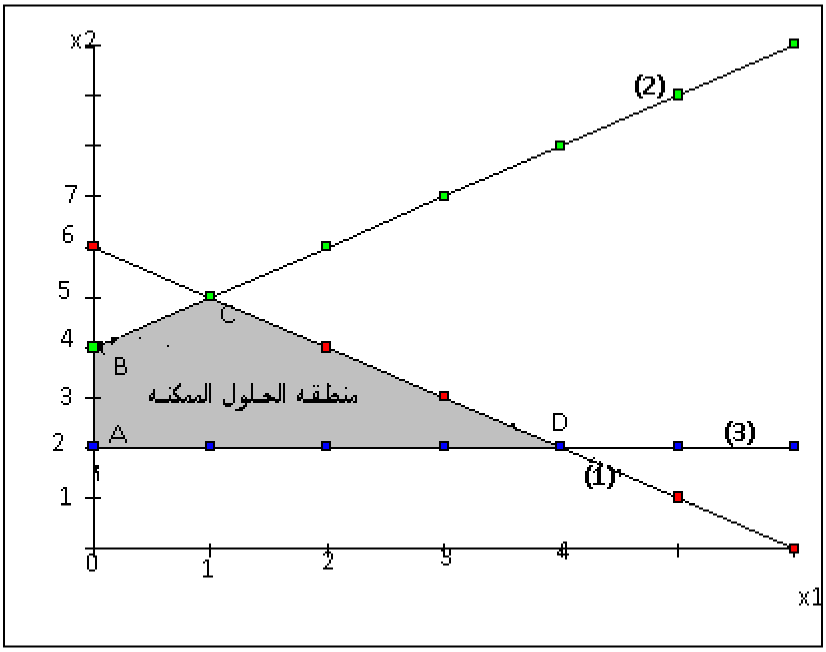
(3)

2=x2

ولكي نحدد أين تقع المساحة الممثلة بالمتراجحة نقوم بأخذ نقطة المبدأ على يمين الخط المستقيم أو على يساره ونعوض بقيمة هذه النقطة فإن تحققت المتراجحة فإن المساحة التي في جهة النقطة هي المساحة المطلوبة وإن لم تتحقق المتراجحة فالمساحة المقابلة هي المساحة المطلوبة.

وبرسم جميع المتراجحات معا نحصل على المنطقة المظللة كما هو موضح في الشكل(1)

الشكل(1)



– لمعرفة نقاط الأركان A.B.C.D نلاحظ أن النقطة A هي نقطة تقاطع المستقيم (3) مع محور X2 أي A(0.2)

النقطة B هي نقطة تقاطع المستقيم (2) مع محور X2 B(0.4)

والنقطة c هي نقطة تقاطع المستقيم (1) مع (2) نقوم بحل المعادلتين معا ، أي

$5X1 + 5x2 = 30$ مع $-X1 + x2 = 4$

فنجد أن : c (1.5)

وبالمثل فان النقطة D هي تقاطع المستقيم (1) مع (3) أي حل

$5X1 + 5x2 = 30$ مع $x2 = 2$

وبالتعويض المباشر بقيمة x2 في المعادلة الأولى نجد أن: $X1=4$

أي أن نقطة التقاطع D(4.2)

– التعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف

نقاط الأركان	$Zp = 6x1 + 4x2$
A(0.2)	$6(0) + 4(2) = 8$
B(0.4)	$6(0) + 4(4) = 16$
c (1.5)	$6(1) + 4(5) = 26$
D(4.2)	$6(4) + 4(2) = 32$

يلاحظ أن قيمة دالة الهدف عند النقطة D(4.2) هي أكبر قيمة وهي تمثل الحل الأمثل (أفضل الحلول الممكنة) .

طريقة حل خاصة:

يمكن إيجاد النقطة D بطريقة أخرى كالتالي :

طريقة رسم دالة الهدف :

تتم على اساس دالة الهدف حيث يتم تمثيل الدالة بيانيا .

حيث 12 هي المضاعف المشترك الاصغر $6x1 + 4x2=12$

لنرسم الآن المستقيم $6x1 + 4x2=12$

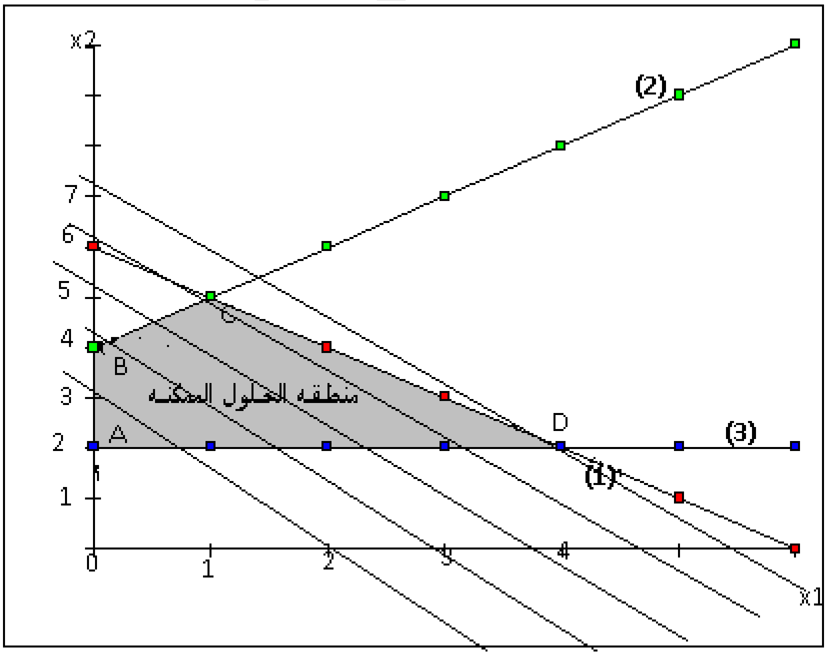
بوضع $X1=0$ أولا نجد النقطة (0،3)

وبوضع $X2=0$ نجد النقطة (0 ، 2)

وبالتالي سنحصل على المستقيم المار بالنقطتين السابقتين كما في الشكل (2) :

وبأخذ المستقيمات المتوازية مع المستقيم السابق ، حتى نحصل على المستقيم الذي يمس أقصى نقطة في منطقة الحلول الممكنة ، وفي حالتنا هذه النقطة D(4.2).وبالتالي فان النقطة D هي نقطة الحل الأمثل .

الشكل (2)



2-تصنيف القيود:

يتم تصنيف القيود في الطريقة البيانية إلى:

أ- **قيود ملزمة** :وهي لقيود التي تمر بركن الحل الأمثل وتسمى بالقيود النادرة وهذا يعني أنها اهتلكت كليا في العملية الإنتاجية.

ب-**قيود غير ملزمة** :وهي التي تشارك في منطقة الحلول العملية الممكنة ولا تارك في ركن الحل الأمثل وتسمى بالقيود المتوفرة هذا يعني انه استهلك جزء منها في العملية الإنتاجية. ولم تستعمل بشكل كامل.

ت-**القيود الفائضة** :لاتستعمل في ركن الحل الأمثل ولا تشارك في منطقة لحلول لعملية الممكنةاي لا تستهلك لا كليا ولاجزئيا.

في المثال السابق القيد الثاني متوفر والقيدين الأول والثالث نادرين لأنهما يمران بركن لحل الأمثل

3-حالات خاصة للحل في الطريقة البيانية:

أولا-أسلوب الحل الأمثل البديل:

هو الحل الأمثل الثاني الذي نحصل عليه من حل مسألة البرمجة الخطية وهذا يعني الحصول على أكثر من حل امثل تحقق قيمهم دالة الهدف العظمى أو الصغرى وعادة نحصل على الحل الأمثل البديل عندما تكون دالة الهدف موازية لأحد القيود أي أن كل نقطة واقعة على القيد الموازي لدالة الهدف والتي تكون ضمن منطقة الحل الممكن تعطي قيمة عظمى أو قيمة صغرى لدالة الهدف وعند نقطة التعظيم أو التقليل تكون دالة الهدف متطابقة مع القيد الموازي لها

مثال:

حل مسألة البرمجة الخطية التالية بالطريقة البيانية

$$\text{Max } ZP=5X1+10X2$$

St :

$$2X1+4X2\leq 8$$
$$5X1+2X2\leq 10$$
$$X1,X2\geq 0$$

الحل:

-تحويل المتراجحات إلى معادلات:

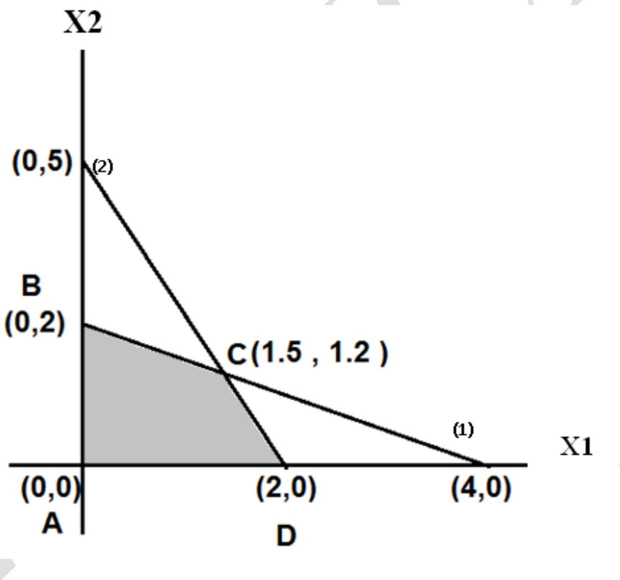
$$\text{Max } ZP=5X1+10X2$$

St :

$$2X1+4X2=8 \quad \ldots\ldots..1$$
$$5X1+2X2=10 \quad \ldots\ldots...2$$

-نقاط التقاطع

(0,2)   (4,0)   (1)
(0,5)   (2,0)   (2)



منطقة الحلول العملية الممكنة هي المنطقة المشتركة للمعادلتين وتتحدد بالنقاط A,B,C,D

A (0,0)…….Zp=0

B (0,2)……..Zp=20

C (1.5,1.25)…..Zp=20

D (2,0)……….Zp=10

نلاحظ عند تعويض قيم النقطتين B,C في دالة الهدف فأنهما تعطيان نفس القيمة ل(Zp=20) وهذا يعني ان المسألة تحتوي على حلين أمثلين أي تحتوي على حل امثل بديل.

ثانيا–أسلوب الحل الغير محدد:

يكون هذا النوع من الحلول عندما تكون منطقة الحلول الممكنة منطقة مفتوحة(غير منتهية)وعند تعيين أية نقطة بعيدة عن النقطة التي تم تسميتها بالحل الأمثل فيمكن الحصول على حل امثل آخر وهكذا لاتوجد نهاية للحلول وكما في المثال الآتي:

$$\text{Min} \quad Z_p=2X_1+X_2$$

St :

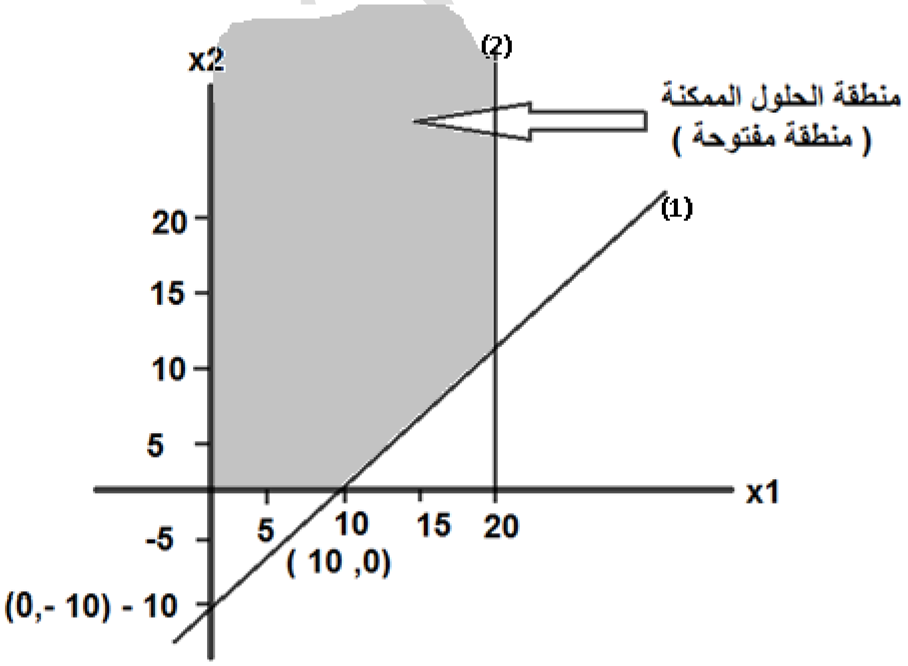
$$X_1-X_2\leq 10$$
$$2X_1\leq 40$$
$$X_1,X_2\geq 0$$

الحل:

$$X_1-X_2=10 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,-10)$$

$$2X_1=40 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_1=20$$

بما أن المنطقة المشتركة منطقة غير محدودة إذن الحل الناتج غير محدود لعدم وجود منطقة محدودة للحل



4- الحل بطريقة SIMPLEX :

إن إيجاد الحل بيانيا لمشكلة البرمجة الخطية قد اتصف بالسهولة و ذلك لوجود متغيرين اثنين فقط ,أما في حالة وجود أكثر من متغيرين لايمكن استخدام الطريقة البيانية ففي هذه الحالة لابد من استخدام طريقة (سمبلاكس) لحل المشكلة. وهي عبارة عن جداول يتم التنقل فيها من جدول إلى آخر حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل في اقل وقت ممكن.

ومن مزايا طريقة السمبلاكس :

1-تعتمد إجراءات نظامية محددة وسهلة

2-تجعل إمكانية الوصول إلى الحل الأمثل واضحا

3-إتباعها أسلوب تحسين الحل الأولي مما يحقق إمكانية الوصول إلى حل أفضل

تستخدم الطريقة اليدوية في حل جداول السمبلاكس في الحالات التي يكون فيها عدد من القيود وليكن (m) صغير جدا وعدد من المتغيرات (n) صغير جدا أما في الحالات التي يكون فيها (n)(m) كبيرة جدا فيمكن استعمال الإعلام الآلي في هذه الحالة.

خطوات الحل:

1-صياغة البرنامج الخطي.

2-كتابة البرنامج على الصورة أو الشكل المعياري هذا يعني تحويل المتراجحات التي على الشكل(≤) إلى مساواة ويعني أن كل القيود تكون في الطرف الأيمن موجبة .

-دالة الهدف يمكن أن تأخذ الصيغة Maxأو Min

3-إضافة عدد من المتغيرات المساعدة S_i (أو تسمى الوهمية ،الراكدة، المهملة،العاطلة)إلى قيود النموذج إلى الطرف الأقل في المعادلة وهو الطرف الأيسر،فمثلا لو كان هناك ثلاث قيود فيضاف ثلاث من المتغيرات الوهمية إلى دالة الهدف (بمعاملات أصفار)وبواقع متغير واحد لكل قيد من القيود الثلاثة(وبمعاملات مقدارها واحد).

4- تحديد عدم السلبية أي أن كافة قيم المتغيرات في المشكلة تكون موجبة أو مساوية للصفر أي أن($0 \leq$ $(X_j , S_i$ حيث j عدد المتغيرات و i عدد القيود.

5-تنظيم جدول الحل الأساسي الممكن أو الابتدائي T_0 بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات X_j , S_i في قيود النموذج و دالة الهدف ويكون الجدول T_0على النحو التالي:

المتغيرات الأساسية	X1	X2	....	Xn	S1	S2	…….	Sm	عمود

									الموارد(T_0)
S1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	1	0	....	0	b_1
S2	a_{21}	a_{21}	....	a_{2n}	0	1	....	0	b2
.	.	.	....	.	0	0	......	.	.
.	.	.	....	.	0	0	......	.	.
.	.	.	....	.	.	.	......	.	.
Sm	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	0	.	......	.	bm
Z_p	$\pm C_1$	$\pm C_2$	....	$\pm C_n$	0	0	......	0	0

6–تحديد المتغير الداخل و على أساس أكبر قيمة بإشارة سالبة في سطر دالة الهدف (Z) من نوع (Max) والعكس صحيح إذا كانت دالة الهدف من نوع (Min) أكبر قيمة بإشارة موجبة . ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل **(عمود الدوران)**.

7–لتحديد المتغير الخارج أي المتغير الذي سيغادر عمود الأساس بعد أن كان متغيرا أساسيا، ذلك المتغير الذي يقابل اقل حاصل قسمة لعناصر عمود الموارد على عناصر العمود الداخل (الدوران)حيث يهمل القسمة على الصفر أو القيم السالبة . ويطلق على السطر الذي يضم المتغير الخارج **(سطر الدوران)**.

8– القيمة الناتجة من تقاطع قيم عمود الدوران مع قيم سطر الدوران تسمى عنصر الدوران.

9–نستخرج قيم السطر المقابل إلى سطر الدوران في الجدول الجديد وذلك بقسمة جميع قيم سطر الدوران على عنصر الدوران

10–لاستخراج القيم الموجودة في العمود المقابل إلى عمود الدوران تكون هذه القيم اصفارا ما عدا القيمة المقابلة لعنصر الدوران إذ تكون عبارة عن واحد (العمود المقابل إلى عمود الدوران يأخذ قيم عمود المتغير الخارج)

11– أما بقية العناصر الموجودة في الجدول يتم استخراجها وفقا للعلاقة التالية:

العنصر الجديد= العنصر القديم- (العنصر المقابل له في عمود الدوران)X(العنصر المقابل له في سطر الدوران) / عنصر الدوران

12– يعاد إجراء الخطوات السابقة نفسها بدءا من تحديد المتغير الداخل و الخارج وعنصر الدوران إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل حيث بعد استكمال كل جدول يتم التأكد من إذا ما كان الجدول يمثل جدول الحل الأمثل

وذلك من خلال تحقق شرطين هما :

*شرط الامثلية: ملاحظة القيم في سطر Zp حيث نصل للحل الأمثل عندما تكون جميع القيم في سطر Zp موجبة أو صفرية في برنامج(Max). وسالبة أو صفرية في برنامج(Min)

*شرط العملية: يشترط ان تكون كل قيم عمود الموارد (الطرف الأيمن) موجبة لكي نصل إلى جدول عملي.

مثال تطبيقي حول طريقة سمبلاكس

جد الحد الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة سمبلاكس

$$\text{Max}: Z=30X_1+18X_2$$

St :

$$X_1+2X_2\leq 200 \quad \dots\dots\dots(1)$$
$$3X_1+2X_2\leq 300 \quad \dots\dots\dots(2)$$
$$X_1 \quad \leq 150 \quad \dots\dots\dots(3)$$
$$X_1\ ,X_2\geq 0 \quad \text{شرط اللاسلبية}$$

الحل:

1- تحول البرنامج إلى الشكل المعياري ولان القيود جميعها من نوع اصغر من أو يساوي ،لذا فان عملية التحويل

تتطلب إضافة متغير وهمي أو مساعد والذي سيرمز له بـ (Si)

وكما يأتي:

$$\text{Max}: Z=30X1+18X2+0S1+0S2+0S3$$

$$X1+2X2+S1=200 \qquad (1)$$
$$3X1+2X2+S2=300 \qquad (2)$$
$$X1+S3=150 \qquad (3)$$
$$X1,X2,S1,S2,S3\geq 0 \quad \text{شرط عدم السلبية}$$

2-نقوم بإعداد الجدول الابتدائي والذي سيضم المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في معادلة دالة الهدف.حيث المتغير الأساسي هو المتغير الذي يكون معامله صفر في معادلة دالة الهدف أي (S1,S2,S3).

والقيم التي تقابل المتغير S1 هي معاملات المتغيرات في القيد (1) . أما القيم التي تقابل المتغير S2 هي معاملات المتغيرات في القيد (2).و القيم التي تقابل المتغير S3 هي معاملات المتغيرات في القيد (3).

عمود الاساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد T_0
S1	1	2	1	0	0	200
S2	3	2	0	1	0	300
S3	1	0	0	0	1	150
Z_P	-30	-18	0	0	0	0

سطر الدوران

عمود الدوران

3-اختيار المتغير الداخل وهو المتغير الذي يمثل اكبر قيمة بإشارة سالبة في سطر Z_P ومن الجدول اعلاه يكون X1 هو المتغير الداخل لان قيمته(30−) ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل (عمود الدوران).

اختيار المتغير الخارج وهو المتغير الذي يمثل اقل قيمة موجبة من حاصل قسمة قيم عمود الموارد على قيم عمود الدوران ،وتهمل أية قيمة سالبة أو صفرية.

200/1=200

300/3=100

150/1=150

إذن المتغير S2هو المتغير الخارج لأنه يمثل اقل ناتج قسمة موجب (100) وهو بذلك يمثل سطر الدوران أما القيمة التي يتقاطع فيها عمود الدوران مع سطر الدوران فهي تمثل عنصر الدوران وهو (3)

4-إيجاد قيم سطر المتغير الداخل X1 وذلك عن طريق قسمة كل قيمة في سطر الدوران على عنصر الدوران.

أما باقي القيم في الجدول فتحسب بالعلاقة:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{(\text{العنصر المقابل له في عمود الدوران}) \times (\text{العنصر المقابل له في سطر الدوران})}{\text{عنصر الدوران}}$$

نتحصل على جدول الحل الثاني:

عمود الاساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد T_1
S1	0	4/3	1	-1/3	0	100
X1	1	2/3	0	1/3	0	100
S3	0	-2/3	0	-1/3	1	50
Z_P	0	2	0	10	0	3000

بعد استكمال الجدول يتم التأكد من إذا ما كان الجدول يمثل جدول الحل الأمثل وذلك من خلال ملاحظة القيم في السطر Z_P ،ولإن دالة الهدف من نوع تعظيم (Max) ،نصل للحل الأمثل عندما تكون جميع القيم في السطر Z_P موجبة أو صفرية. لذا في الجدول الثاني جميع القيم في السطر Z_P موجبة أو صفرية وبالتالي شرط الامثلية محقق فهو يمثل جدول الحل الأمثل .

اتخاذ القرار :حيث يتم إنتاج 100 وحدة من النوع الأول ($X1=100$) لنتمكن من تحقيق ربح قدره 3000 و.ن ($Z_P=3000$).

5-طبيعة الموارد في جدول SIMPLEX:

من خلال جدول الحل الأمثل السابق يمكن معرفة طبيعة الموارد الموارد النادرة والموارد المتوفرة أما الموارد الفائضة فلا تظهر في جدول السمبلاكس بل في الطريقة البيانية فقط .

-الموارد التي تكون خارج عمود الأساس هي موارد نادرة ، حيث أن المورد الثاني (S2)خرج من عمود الأساس فهو مورد نادر استهلك كليا من اجل إنتاج 100 وحدة من X1

- الموارد التي تبقى داخل عمود الأساس هي موارد متوفرة ، حيث أن الموردين الأول والثالث ($S_1.S_3$) بقيا في عمود الأساس فهما موردين متوفرين . فهناك جزء من المورد الأول قدره 100 لم يتم استعماله في العملية الإنتاجية ،وكذلك جزء من المورد الثالث قدره 50 لم يتم استعماله في العملية الإنتاجية .

المحور الثالث:تحليل الحساسية.

إن الوصول إلى الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية هو غاية الحل ,وان الحل الأمثل هو الحل الذي نجده من خلال قيم المتغيرات الموجودة في نموذج البرمجة الخطية في ظل معاملات المتغيرات في دالة الهدف وداخل القيود ولوجود كميات في المصادر(الجانب الأيمن) محدودة ولكن ماالعمل فيما لو ,وبعد استخراج الحل الأمثل تم تغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف أي تغير الأرباح أو التكلفة أو تغيير اسعار السوق وتبدل العرض.... إذن كيف يمكن الاستفادة من الحل الأمثل للوصول إلى الحل الأمثل تحت أي ظرف من هذه الظروف ,انه من الطبيعي أن تحصل كل هذه التغيرات أو بعضها لان الواقع العملي يصعب السيطرة عليه ،ومثل هذه الحالة لايمكن توقعها بشكل صحيح لذا نلجأ إلى تحليل الحساسية لمعالجة كل تغير ,ومن هذه التغيرات نذكر:

:

- تغيرات لها تأثير على العملية
  - التغير في الطرف الأيمن للقيود(الموارد)
  - إضافة قيد جديد
- تغيرات لها تأثير على الأمثلية
  - التغيرات في معاملات دالة الهدف
  - إضافة متغير قراري جديد(إضافة نشاط جديد)

من اجل مواصلة تحليل الحساسية يمكن وضع الخطوات التالية:

1-إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي.

2-من اجل أي اقتراح للتغيير في البرنامج الأصلي وبعد إعادة حساب العناصر الجديدة للجدول الأمثل وباستعمال الحسابات الأصلية للثنائية ،ننشأ الخطوة الثالثة.

3-إذا كان الجدول الجديد غير امثل نتوجه إلى الخطوة (4) وإذا كان غير عملي نتوجه إلى الخطوة (5)، وإلا يتم تمثيل جدول جديد كجدول حل جديد امثل.

4-استعمال طريقة simplex العادية.

5- استعمال طريقة simplex الثنائية للوصول إلى الجدول الأمثل الجديد

مثال تطبيقي:

افترض البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} &\text{Max : } Zp=2X_1+3X_2 \\ &\text{St :} \\ &7X_1+4X_2 \le 28 \\ &4X_1+5X_2 \le 20 \\ &X_2 \le 3 \\ &X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج هو كالتالي:

عمود الأساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد
S1	0	0	1	-7/4	19/4	29/4
X1	1	0	0	1/4	-5/4	5/4
X2	0	1	0	0	1	3
Zp	0	0	0	1/2	1/2	46/4

حيث يتم إنتاج 5/4وحدة من النوع الأول $(X1=5/4)$;3وحدات من النوع الثاني $(X2=3)$ لنتمكن من تحقيق ربح قدره 46/4 و.ن $(Z_P=46/4)$.

1-تغيرات لها تأثير على العملية :

1-1-تغيرات في الموارد المتاحة للطرف الأيمن:

بافتراض انه حدث تغيير للمورد الثاني من 20 إلى 22 فما هو تأثير هذا التغير على الحل الأمثل.

إن هذا التغيير سوف يكون له تأثير على شرط العملية فقط وبالتالي فان عمود الموارد الجديد على ضوء أي تغيير سيكون كالتالي:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{عمود الاساس} & & \text{مصفوفة المتغيرات الاساسية} & & \text{عمود الموارد} & & \text{عمود موارد الجديد} \\ \begin{pmatrix} S1 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & * & \begin{pmatrix} 28 \\ 22 \\ 3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 15/4 \\ 7/4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

عمود الأساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد
S1	0	0	1	-7/4	19/4	15/4
X1	1	0	0	1/4	-5/4	7/4
X2	0	1	0	0	1	3
Zp	0	0	0	1/2	1/2	50/4

شرط العملية لم يتأثر بل التغيير الذي حدث في قيم عمود الموارد الجديد حيث تصبح المؤسسة تنتج 7/4وحدة من النوع الأول $(X1=7/4)$;3وحدات من النوع الثاني $(X2=3)$

لنتمكن من تحقيق ربح قدره 50/4 و.ن $(Z_P=(7/4)2+(3)\ 3=50/4)$.

إذا افتراضنا انه حدث تغيير للمورد الثاني والثالث معا حيث أن المورد الثاني تغير من 20 إلى 22 والمورد الثالث من 3 إلى 5 فما هو تأثير هذا التغير على الحل الأمثل.

عمود الاساس مصفوفة المتغيرات الاساسية عمود الموارد عمود موارد الجديد

$$\begin{pmatrix} S1 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 28 \\ 22 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53/4 \\ -3/4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

عمود الأساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد
S1	0	0	1	-7/4	19/4	53/4
X1	1	0	0	1/4	-5/4	-3/4
X2	0	1	0	0	1	5
Zp	0	0	0	1/2	1/2	54/4

شرط العملية أصبح غير محقق وبالتالي سوف نكمل الحل للجدول بطريقة تسمى طريقة حل السمبلاكس الثنائية (لا يعني حل الثنائية)لم يتأثر بل التغيير الذي حدث في قيم عمود الموارد الجديد حيث تصبح **طريقة حل السمبلاكس الثنائية**

وهي طريقة حل خاصة تجرى في حالة عدم تحقق شرط العملية

خطوات حل هذه الطريقة:

1-نحول البرنامج إلى الشكل المعياري إذا كان البرنامج من بدايته.

2-بعد وضع الجدول واختار سطر الدوران (المتغير الخارج)حيث يتم اختيار اكبر عنصر من عمود الموارد باشارة سالبة(-) سواء للبرنامج(Max)أو (Min)

3- اختيار عمود الدوران (المتغير الداخل) يتم بقسمة عناصر السطر Zp على عناصر سطر الدوران وهذا للعناصر السالبة فقط ونهمل العناصر الأكبر أو تساوي الصفر

$$\left|\begin{array}{c|ccccc|} Zp & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ X1 & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{1 \quad\; 0 \quad\; 0 \quad\; 1/4}_{\text{تهمل}}} & -5/4 \end{array}\right.$$

-نختار عمود لدوران في دالة الهدف (Z) من نوع (Max) لأكبر ناتج قسمة متبوع بإشارة سالبة ،و إذا كانت دالة الهدف من نوع (Min) على أساس أكبر ناتج قسمة متبوع بإشارة موجبة .

في هذا المثال فان X1 هو المتغير الخارج له اكبر قيمة متبوعة بإشارة سالبة في عمود لموارد وبقسمة عناصر السطر Zp على عناصر سطر الدوران X1 لدينا قيمة واحدة سالبة إذنS3 هو المتغير الداخل. وعنصر الدوران هو (- 5/4)

3-وبإكمال حساب باقي قيم الجدول بنفس الخطوات والمراحل في طريقة السمبلاكس العادية(الاختلاف الوحيد يكمن في اختار سطر وعمود الدوران)

عمود الأساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد
S1	19/5	0	1	-4/5	0	52/5
S3	-4/5	0	0	-1/5	1	3/5
X2	4/5	1	0	1/5	0	22/5
Zp	2/5	0	0	3/5	0	528/40

1-2-إضافة قيد جديد:

بالنسبة للتغيرات التي تحدث على أساس إضافة قيد جديد فينظر إلى طبيعة هذا القيد:

-إذا كان هذا القيد الأخير يحقق شروط الحل الأمثل نقول أن هذا القيد متوفر وبالتالي لا يؤثر على شرط العملية

- إذا كان هذا القيد الأخير لا يحقق شروط الحل الأمثل نقول أن هذا القيد نادر وبالتالي سوف يؤثر على شرط العملية وعلى الحل الأمثل السابق.

إذا افترضنا انه تم إضافة قيد جديد: $X_2 \leq 2$

يصبح البرنامج

$$\text{Max}: Zp=2X_1+3X_2$$
$$\text{St}:$$
$$7X_1+4X_2\le 28$$
$$4X_1+5X_2\le 20$$
$$X_2\le 3$$
$$X_2\le 2$$
$$X_1, X_2\ge 0$$

بإضافة هذا القيد يتم إجراء الحسابات التالية

1-تحويل هذا القيد إلى الشكل المعياري: $X_2+S4=2$ 1

2- حساب قيمة X_2 من جدول الحل الأمثل حتى يمكن إجراء تعويض في هذا القيد الجديد

باستخراج سطر X_2 نحصل على: $0X_1+X_2+0S1+0S2+1S3=3$

$X_2+1S3=3$

$X_2=3-S3$ 2

بتعويض المعادلة 2 في المعادلة 1نجد $3-S3+S4=2$

$$\boxed{-S3+S4=-1}$$

نتيجة الحساب الاخيرة يتم إضافتها إلى جدول الحل الأمثل

عمود الاساس	X1	X2	S1	S2	S3	S4	عمود الموارد
S1	0	0	1	−7/4	19/4	0	29/4
X1	1	0	0	1/4	−5/4	0	5/4
X2	0	1	0	0	1	0	3
S4	0	0	0	0	−1	1	−1
Zp	0	0	0	1/2	1/2	0	46/4

شرط العملية غير محقق الجدول ليس جدول حل امثل نكمل الانتقال إلى جدول آخر بطريقة السمبلاكس الثنائية

والجدول الجديد يكون بعد اختيار سطر الدوران S4 وعمود الدوران S3 وعنصر الدوران هو (-1)

عمود الاساس	X1	X2	S1	S2	S3	S4	عمود الموارد
S1	0	0	1	-7/4	0	19/4	10/4
X1	1	0	0	1/4	0	-5/4	10/4
X2	0	1	0	0	0	1	2
S3	0	0	0	0	1	-1	1
Zp	0	0	0	1/2	0	1/2	11

شرط العمليةمحقق تصبح المؤسسة تنتج 10/4وحدة من النوع الأول $(X1=10/4)$ و 2 وحدات من النوع الثاني $(X2=2)$

لنتمكن من تحقيق ربح قدره 11 و.ن $(Z_P=(10/4)2+(2)\ 3=11)$.

2-تغيرات لها تأثير على الامثلية:

2-1-تغيرات في معاملات دالة الهدف:

إذا كانت التغيرات تشمل معاملات المتغيرات التي تظهر أساسية في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأصلي فسيتم حساب قيم جديدة للثنائية من اجل استعمالها في حساب عناصر السطر Zp .

أما إذا كانت التغيرات تشمل معاملات المتغيرات الغير أساسية في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأصلي فنستعمل قيم الثنائية من الحل الأمثل للبرنامج الأصلي لحساب عناصر السطر Zp .

بافتراض انه حدث تغيير لدالة الهدف في البرنامج الأصلي حيث:

$$\text{Max} : Zp=3X_1 +5X_2$$

هذا التغيير يشمل المتغيرات الاساسيةوبالتالي يجب حساب قيم ثنائية جديدة وحسابها يتم الطريقة التالية:

$$[Y1.Y2.Y3] = [0 \ 3 \ 5] * \begin{bmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 3/4 \ 5/4]$$

$$Y1=0 , \quad Y2=3/4 \quad Y3=5/4$$

بعد إيجاد قيم الثنائية الجديدة من حساب ضرب المصفوفات يتم حساب عناصر السطر Zp وهذا بأخذ الفرق بين الطرف الأيمن والأيسر لقيد الثنائية المشارك مع كل متغير أصلية.

مع X1 : (قيد الثنائية بالنسبة لـX1) $7Y1 +4Y2+0Y3 -3$

بتعويض قيم Y1 .Y2.Y3 نجد:

$$7(0) +4(3/4)+0(5/4) -3 =0$$

مع X2 : (قيد الثنائية بالنسبة لـX2) $4Y1 +5Y2+1Y3 -5$

بتعويض قيم Y1 .Y2.Y3 نجد:

$$4(0) +5(3/4)+1(5/4) -5 =0$$

مع S1 : $Y1 -0 = 0$

مع S2 : $Y2 -0=3/4$

مع S3 : $Y3 -0=5/4$

مدام البرنامج على شكل Max وان عناصر السطر Zp التي تم حسابها لم يؤثر على شرط الامثلية إذن التغير الوحيد الذي حدث يكون في قيمة Zp

2-2-إضافة نشاط جديد:

بافتراض انه حدث تغيير في البرنامج الأصلي بإضافة نشاط جديد حيث:

$$\text{Max} : Zp=2X_1 +3X_2+2X3$$
$$\text{St} :$$
$$7X_1 + 4X_2+X3 \leq 28$$
$$4X_1+5 X_2+2X3 \leq 20$$
$$X_2 - X3 \leq 3$$
$$X_1 , X_2 , X3 \geq 0$$

لمعالجة هذا التغيير يتم إيجاد قيد الثنائية المشارك مع المتغير الجديد حيث:

$$Y1 +2Y2-Y3 \geq 2$$

مادام X3 غير أساسي في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأصلي على أساس حساب عنصر السطر Zp لهذا المتغير الجديد وبنفس الطريقة السابقة .الفرق بين الطرفالأيمن والأيسر لقيد الثنائية المشارك.

مع X3 : (قيد الثنائية بالنسبة لـX3) $Y1 +2Y2-Y3 \ -2$

$$Y1 = 0$$
$$Y2 = 1/2$$
$$Y3 = 1/2$$

بتعويض قيم Y1 .Y2.Y3 نجد:

$$0 +2(1/2)-(1/2) -2 = -3/2$$

بالنسبة لحساب باقي عناصر عمود X3 تتم بالطريقة التالية:

$$\begin{pmatrix} S1 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29/4 \\ 7/4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

معاملات X3 في البرنامج

عناصر عمود X3

جدول الحل الأمثل بعد إضافة النشاط X3

عمود الاساس	X1	X2	X3	S1	S2	S3	عمود الموارد
S1	0	0	-29/4	1	-7/4	19/4	29/4
X1	1	0	7/4	0	1/4	-5/4	5/4
X2	0	1	-1	0	0	1	3
Zp	0	0	-3/2	0	1/2	1/2	46/4

شرط الامثلية غير محقق قيمة سالبة في السطر Zp نقوم بالحل بطريقة السمبلاكس العادية فنجد الحل الأمثل كالتالي يتم إنتاج 5/7وحدة من النوع الثالث (5/7) و 26/7وحدات من النوع الثاني (X2=26/7) لنتمكن من تحقيق ربح قدره 88/7و.ن (Zp=(26/7)3+(5/7) 2=88/7).