

توزيع بواسون

تعريف :

توزيع بواسون هو توزيع احتمالي منفصل للمتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد النجاحات في فترة زمنية معينة أو منطقة (مساحة) محددة ، وتعطى معادلته وفق الصيغة التالية :

$$P (x , \lambda) = (e^{-\lambda} * \lambda^x) / x!$$

حيث :

$X : 1 , 2 , 3 , 4 , \dots$ يمثل عدد النجاحات

$e = 2.7182$ عدد ثابت

λ : هي معدل النجاحات خلال فترة معينة أو منطقة معينة

شروط تطبيق توزيع بواسون :

إن تجربة بواسون هي كل تجربة تحقق الشروط التالية :

أ - معدل عدد النجاحات λ تحدث في فترة زمنية محددة أو منطقة معينة .

ب - احتمال النجاح يتناسب مع طول الفترة أو مساة المنطقة .

ج - إذا اعتبرنا عدة فترات زمنية منفصلة عن بعضها فإن حدوث النجاحات في فترة معينة يكون مستقلا عنه في فترة أخرى .

مثال :

معدل عدد الحوادث على طريق وطني هو 6 مرات أسبوعيا . أحسب الاحتمالات التالية :

1 - عدم حدوث أي حادث على ذلك الطريق خلال أسبوع معين .

2 - حدوث 4 حوادث خلال أسبوع معين .

3 - حدوث أقل من حادثين 2 خلال أسبوعين متتاليين .

الحل :

1 - احتمال عدم حدوث أي حادث :

$$P (X = 0 , \lambda = 6) = (e^{-6} * 6^0) / 0!$$

$$= \boxed{0.0025}$$

2 - احتمال وقوع 4 حوادث خلال أسبوع معين :

$$P (X = 4 , \lambda = 6) = (e^{-6} * 6^4) / 4!$$

$$= 0.13$$

3 - احتمال وقوع أقل من حادثين خلال أسبوعين :

$$\lambda = 6 * 2 = 12 : \text{هنا}$$

$$P (X < 2) = P (X = 0) + P (X = 1)$$

$$P (X = 0) = (2.7182^{-12} * 12^0) / 0!$$

$$= 0.000006$$

$$P (X = 1) = (2.7182^{-12} * 12^1) / 1!$$

$$= 0.000073$$

$$P (X < 2) = 0.000006 + 0.000073$$

$$P (X < 2) = \boxed{0.000079}$$

المقاربة بين توزيع ذي الحدين و توزيع بواسون :

إذا كان n عدد التجارب كبيرا جدا و p احتمال النجاح صغيرا جدا بحيث تكون القيمة $n.p$ معتدلة فإنه يمكن المقاربة بين توزيعي ذي الحدين و بواسون حيث تكون القيمة $n.p$ هي نفسها λ معدل النجاحات :
 $\lambda = n.p$

مثال :

إذا كان احتمال الغياب عن رحلة جوية هو 1 % و كان عدد المسافرين هو 200 . أحسب الاحتمالات التالية :

أ - أن يحضر جميع المسافرين .

ب - أن يتغيب مسافر واحد على الأقل .

الحل :

ط. 1. التوزيع الثنائي

$$n = 200, p = 0.01, q = 0.99$$

1 - احتمال أن يحضر جميع المسافرين :

$$P(X = x) = n C x * p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 0) = 200 C 0 * (0.01)^0 (0.99)^{200}$$

$$P(X = 0) = 0.13$$

2 - احتمال غياب طالب واحد غلى الأقل :

$$P(X \geq 1) = 1 - (X < 1) = 1 - 0.13$$

$$= 0.87$$

ط. 2. توزيع بواسون

$$\lambda = n.p = 200 * 0.01 = 2$$

1- احتمال أن يحضر جميع المسافرين :

$$P(x, \lambda) = (e^{-\lambda} \lambda^x) / x !$$

$$P(0, 2) = (2.7182^{-2} 2^0) / 0 !$$

$$P(0, 2) = 0.13$$

2- احتمال غياب طالب واحد غلى الأقل :

$$P(X \geq 1) = 1 - (X < 1) = 1 - 0.13$$

$$= 0.87$$