TP 1: Etude des comportements des systèmes 1^{er} et $2^{ème}$ ordre

OBJECTIF DE TP :

- Simulation analogique et informatique
- Mesurer les paramètres qui caractérisent les différentes réponses : temps de montée ; temps de réponse ; 1er dépassement maximum, temps de pic et précision,
- Observer la réponse d'un système instable

I. RAPPEL THEORIQUE :

L'analyse temporelle représente une possibilité très utilisée pour décrire le comportement transitoire des systèmes linéaires, aux côtés de l'analyse fréquentielle. L'objectif est de présenter les notions fondamentales du régime transitoire et leurs applications aux systèmes asservis afin de déterminer leurs performances dans ces domaines. Un intérêt particulier est accordé aux systèmes d'ordre un et deux. De tels systèmes sont fréquemment rencontrés en pratique et nombreux sont les systèmes plus complexes qui peuvent être approchés par des systèmes d'ordre un ou deux. Leurs caractéristiques temporelles sont parfaitement maîtrisées à partir de la connaissance de leur fonction de transfert (FT).

I.1. Système du premier ordre :

On appelle système du premier ordre, tout système régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants:

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

avec τ: constante de temps > 0 et K: gain statique.

La fonction de transfert du système s'obtient par l'application de la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente sans tenir compte des conditions initiales; La fonction de transfert est donnée par :

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{1+\tau s}$$

Elle admet un pôle réel $p = -1/\tau < 0$.

La réponse indicielle d'un tel système est la réponse à un échelon $e(t) = E_0 u(t)$. L'équation différentielle dans ce cas, est donc la suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\ E_0 u(t)$$

L'application de la transformée de Laplace à l'équation différentielle à condition initiale nulle (s(0) = 0) conduit à:

$S(s) = \frac{K}{1+\tau s}\frac{E_0}{s}$, L'équation de la tangente à l'origine est : $S_t = \frac{K\,E_0}{\tau}t$

Des valeurs particulières de la réponse indicielle sont fournies par le tableau suivant :

pour t = τ	s(t) = 63% K E_0
pour t = 3 τ	s(t) = 95% K E_0

La figure 1 représente la réponse indicielle d'un système de fonction de transfert : $H(s) = \frac{5}{1+2s}$

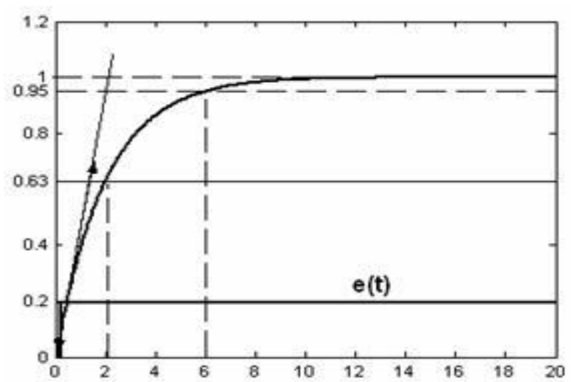


Fig. 1

- Temps de réponse :

Afin d'évaluer la durée du régime transitoire, on défini le temps de réponse à 5%, noté $Tr_{5\%}$, comme étant le temps mis pour que la réponse atteint 95% de sa valeur finale; D'où : $Tr_{5\%} = 3\tau$, Il est indépendant de *K* et de *E_0*. L'analyse temporelle ci-dessus a permis de caractériser complètement la réponse indicielle d'un système d'ordre un :

- démarrage à l'origine : pente non nulle
- forme de la réponse transitoire : exponentielle sans oscillation
- estimation de la durée du régime transitoire : $Tr_{5\%} = 3\tau$
- valeur finale : KE_0

I.2. Système du second ordre :

On appelle système du second ordre tout système régi par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, l'équation s'écrit sous sa forme canonique suivante :

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2s(t)}{dt} + \frac{2z}{\omega_n}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\,e(t)$$

avec:

- ω_n : la pulsation propre du système non amorti (rd/s) si l'unité du temps est en seconde;
- K : gain statique de dimension = [dimension de s]/[dimension de e];
- z : facteur ou coefficient d'amortissement, parfois noté m ou ξ (sans dimension).

On associe au système un bloc à l'intérieur duquel on inscrit sa fonction de transfert en précisant que E(s) et S(s) sont respectivement l'entrée et la sortie du système :

$$E(s) \longrightarrow \boxed{H(s) = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2zw_n s + w_n^2}} \longrightarrow S(s)$$

Les pôles de la fonction de transfert sont les racines de l'équation caractéristique (*Dénominateur*).

La réponse indicielle est la réponse à l'excitation e(t) =E_0 u(t); soit E(p) =E_0/s.

$$S(s) = \frac{KE_0}{s(\frac{1}{w_n^2}s^2 + \frac{2z}{w_n}s + 1)}$$

La tangente à l'origine est donc nulle. La courbe démarre tangentiellement à l'axe du temps, passe par une phase transitoire avant de se stabiliser à sa valeur finale $K\ E_0$. L'allure du régime transitoire dépend de la nature des pôles de la fonction de transfert.

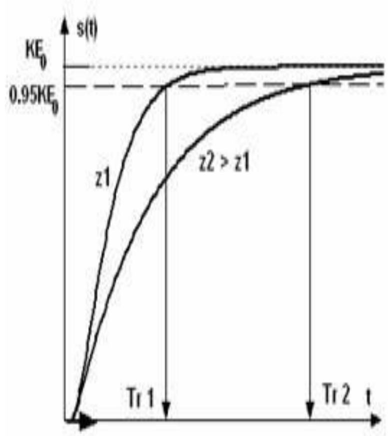
- Comportement transitoire en fonction du coefficient d'amortissement :

La nature des pôles de la fonction de transfert détermine le comportement transitoire. Elle dépend en particulier du coefficient d'amortissement comme le montre l'étude de l'équation suivante :

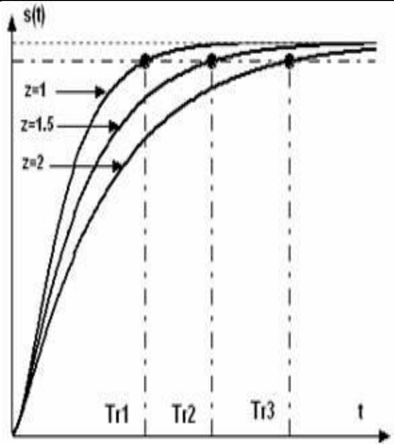
On a : $\Delta = z^2 w_n^2 - w_n^2 = w_n^2(z^2 - 1)$. Les solutions r_1 et r_2 de l'équation ci-dessus sont données dans le tableau suivant selon le coefficient d'amortissement z:

si z > 1	$r_2 = -\omega_n\left(z - \sqrt{z^2-1}\right)$ $r_1 = -\omega_n\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$	Deux pôles réels Distincts
si z =1	$r_1 = r_2 = -\omega_n$	un pôle réel double

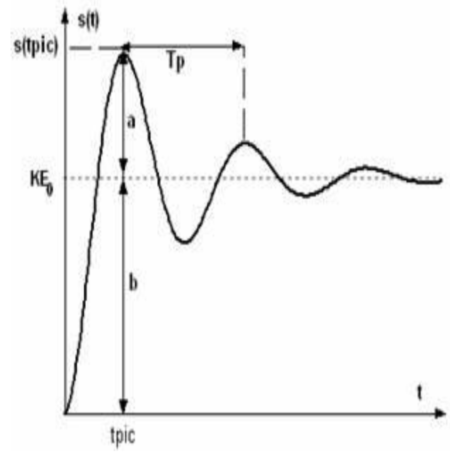
si z < 1	$r_1 = -\omega_n\left(z + j\sqrt{1-z^2}\right)$ $r_2 = -\omega_n\left(z - j\sqrt{1-z^2}\right)$	Deux pôles complexes conjugués



Cas 1: z >1 - Régime apériodique



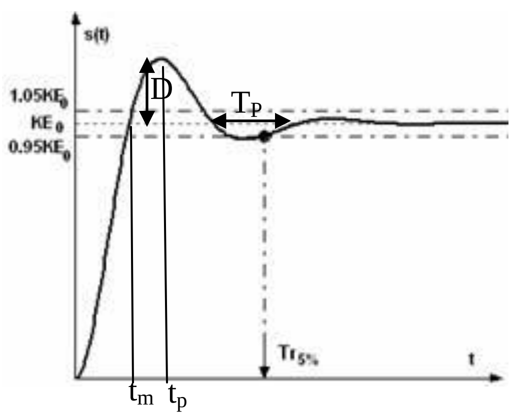
Cas 2: z =1 - Régime apériodique critique



Cas 3 : z < 1 régime oscillatoire amorti

- Temps de réponse :

Lorsque la réponse indicielle est apériodique, le temps de réponse à 5% est toujours défini par le temps au bout duquel la réponse atteint 95% de sa valeur finale. Par contre, lorsque la réponse est oscillatoire amortie, le temps de réponse à 5% est défini par le temps au bout duquel, la réponse rentre définitivement dans la bande définie par 105% et 95% de la valeur finale. La figure 2 donne un exemple de relevé du temps de réponse à partir de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre avec z < 1.



Tp: pseudo-periode des oscillations

tm : temps de montée

D : dépassement maximale

tp : temps de pic

tr : temps d'établissement

KE_0 : valeur finale

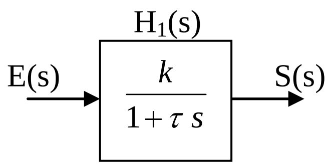
Fig. 2

Les performances des systèmes asservis sont formulées parfois en termes de caractéristiques temporelles et/ou fréquentielles. En générale, on souhaite que la fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi soit du premier ordre ou du second ordre avec des caractéristiques temporelles et/ou fréquentielles (*Gain statique*, *Constante de temps*, *Paramètres z et ω_n*) fixées par le cahier des charges.

II. SIMULATION

Système du 1er ordre

Un système du 1er ordre s'écrit de manière générale:



k : gain statique,

τ : constante de temps

1. Etude en boucle ouverte (BO)

- Réaliser le montage correspondant par simulink
- Appliquer à l'entrée du système un signal échelon unitaire.
- Tracer la réponse du système en boucle ouverte en complétant les tableaux ci-dessous :
  - **Pour *k*=1**

τ	0.5	1	1.5
Temps de réponse à 5%			

Tableau 1

- **Pour τ =1**

k	1	3	10
Erreur statique			

Tableau 2

- On met en entrée un échelon unitaire ($E(s)=1/s$). Retrouver à l'aide des transformées inverses de Laplace, l'expression de $S(t)$, réponse du système à cette entrée.

2. Etude en boucle fermée (BF)

Dans ce cas le système est en boucle fermée avec un retour unitaire.

- Refaire les mêmes étapes (en BO) avec :
  - **Pour *k*=1**

τ	0.5	1	1.5
La constante de temps τ' (en BF)			
Temps de réponse à 5%			

Tableau 3

- **Pour τ =1**

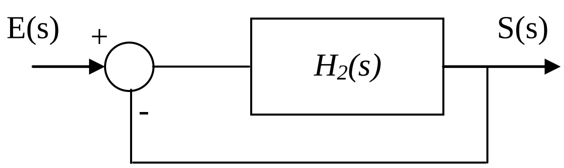
K	1	3	10
Le gain K' en BF			
La constante de temps τ' (en BF)			
Erreur statique $\varepsilon(t_f)$			

Tableau 4

- Exprimer la nouvelle constante de temps τ' en fonction de τ et k. en déduire le temps de réponse $t_r^{'}$.
- Exprimer en fonction de k le gain statique k' et l'erreur statique en boucle fermée pour une entrée en échelon unitaire.
- Interpréter les réponses indicielles obtenues en boucle ouverte et en boucle fermée.

Système du second ordre

Un système du second ordre s'écrit de manière générale:



Où $H_2(s) = \dfrac{k}{s(1+\tau s)}$

1. **Etude en boucle ouverte (BO)**

- Réaliser le montage correspondant par simulink
  - **1er Cas :** on fixe w_n à 1[rad/s] avec k=1
- Tracer la réponse indicielle du système en variant z .
- Relever la valeur maximale de chaque réponse puis compléter le tableau ci-dessous :

Z	0	0.1	0.5	0.7	1	1.5	2
y_{max}							
$D_1(\%)$							

Tableau 5

- **2ème Cas :** Prenant w_n à 1[rad/s], z = 0.25 et k=1

- Déterminer les temps de temps caractéristiques du système : t_p, t_m, et t_r
- Déterminer graphiquement la valeur de w_d (pulsation d'oscillation)

- **3ème Cas :** on fixe k=1 et z=0.5

Tracer la réponse indicielle pour $w_n = 1$; 3 ; et 10 [rad/s]

Que remarquez – vous ?

2. Etude en boucle fermée (BF)

Réaliser par SIMULINK le schéma de simulation du système en boucle fermée à retour unitaire avec un gain k sur la chaîne d'action.

- **1er Cas :** on donne w_n = 1[rad/s] , z=0.3

- Exciter le système par un échelon unitaire et observer la sortie en variant le gain k
- Pour chaque réponse relever le dépassement, le temps de pic, le temps de montée et l'erreur statique correspondante en complétant le tableau ci – dissous :

K	1	5	10	100
D_1(%)				
t_p(s)				
t_m(s)				
$\varepsilon(t_f)$				

3. Cas d'un système du second ordre instable :

Tracer la réponse indicielle pour les deux cas suivants :

- z = - 0.1 et w_n=1 rd/s
- z = - 0.1 et w_n=10 rd/s

* Pour le système du second d'ordre en B.F à retour unitaire avec un gain *k*.

- Exprimer la nouvelle constante de temps τ' en fonction de τ et k. En déduire le temps de réponse t_r'.
- Exprimer en fonction de k le gain statique k' et l'erreur statique E'(∞).
- Quelles conclusions pouvez-vous en tirer en comparant les réponses indicielles obtenus en BO et en BF.
- Discuter l'intérêt de l'action proportionnelle en régime statique et dynamique.