Corrigé Type (Examen)
ondes et vibrations
2019 / 2020.

Ex N° 1

Suivant la loi du noeuds on a : $\sum U = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ (0,1)

En faisant correspondre avec L'eq (1) $\rightarrow \ddot{q} + 2\sigma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$

on trouve :

$\sigma = \frac{R}{2L}$ (0,1) $\rightarrow$ facteur d'amortissement (0,1)

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ (0,1) $\rightarrow$ pulsation propre.

$\rightarrow$ La courbe est une sinusoïde amortie Donc : amortissement faible $\Rightarrow \Delta' = \sigma^2 - \omega_0^2 < 0$ (0,1)

$\Rightarrow$ La solution de l'équation diff est de la forme :

$q(t) = q_0 e^{\sigma t}\cos(\omega_a t + \varphi)$ (0,1)

avec : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$ (0,1)

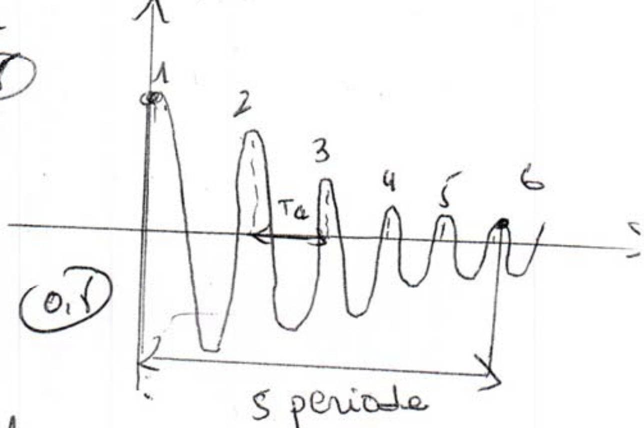
× $V_c(t) = \frac{1}{C}q(t)$ (0,1)

$\Rightarrow V_c(t) = \frac{q_0}{C} e^{-\sigma t}\cos(\omega_a t + \varphi)$ (0,1)

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}}$

$\sigma \ll \Rightarrow T_a \simeq T_0$

la courbe est de la forme



$D' = \ln\left(\frac{V_{oc1}}{V_{oc6}}\right) \neq \sigma T_a \simeq \sigma T_0$

$5D = D' = \ln\left(\frac{V_{oc1}}{V_{oc6}}\right)$

$\begin{cases} D = \sigma T_a = \ln\left(\frac{V_{oc1}}{V_{oc2}}\right) \\ D' = 5D = \ln\frac{V_{oc1}}{V_{oc6}} = 5\sigma T_a \end{cases}$ (0,1)

$\Rightarrow \ln\frac{V_{oc1}}{V_{oc}} = 5\sigma T_a \simeq 5\sigma T_0$

$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{5T_0}\ln\frac{V_{oc1}}{V_{oc6}}$

Donc $R = \sigma.(2L)$

$= \frac{2L}{5T_0}\ln\frac{V_{oc1}}{V_{oc6}}$

(0,1) $R = \frac{L\omega_0}{5\pi}\ln\frac{V_{oc1}}{V_{oc6}} = 3,9\,\Omega$

Ex N°2 :

1. Equations diff du mvt :

0,5

$S = 1 \Rightarrow$ le syst est un système à 1 degrée de liberté car :

* pour le disque (1 seule rotation) $\Rightarrow \theta$.

* pour la masse : $y = R\theta$

est donc $q(t) = \theta(t)$ 0,5

$\boxed{L = T - U} \rightarrow$ 0,5

$T = T_m + T_d$

$= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\dot{\theta}^2$

1

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2} M\right) R^2 \dot{\theta}^2}$

0,5

$U(\theta) = U_k$ / $\boxed{x_k = r\theta}$

$\boxed{U(\theta) = \frac{1}{2} k r^2 \theta^2 + C}$ 0,5

d'où

$L(\dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2} M\right) R^2 \dot{\theta}^2$

$- \frac{1}{2} k r^2 \theta^2$

L'équation de lagrange pour un système à 1 degré de liberté est :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial \theta}\right] = 0}$$ 0,5

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{k r^2}{\left(m + \frac{1}{2} M\right) R^2}\,\theta = 0}$$ 0,5

2/ L'équation précédente admet une solution sinusoidale de pulsation

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k r^2}{\left(m + \frac{1}{2} M\right) R^2}}}$$ — 0,5

A.N : $\boxed{\omega_0 = 6,54 \text{ rad/s}}$ 0,5

donc :

$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)}$ 0,5

C.I $\begin{cases} \theta(0) = 5^0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{\theta}(t) = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5^0 = \theta_0 \cos\varphi & \Rightarrow \theta_0 = 5^0 \\ 0 = -\omega_0 \theta_0 \sin\varphi & \varphi = 0 \end{cases}$

0,5 $\boxed{\theta(t) = 5 \cos(6,54 t)}$

Questions de cours :

1) $\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$, $\omega_0^2 > 0$ (1)

2) $q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Equation de mvt sinusoidale avec un pulsation propre ω_0 (1)

3) Les trois types d'amortissement

→ Faible $\Delta < 0$

→ Critique $\Delta = 0$ (1)

→ Fort $\Delta > 0$

4) L'amortissement faible (1)

5) Le mode propre est un mouvement sinusoidale des éléments du système avec la même pulsation (0,5) Ω_1 ou Ω_2 alors :

$\theta_1(t) = \bar{\theta}_{01} e^{j\Omega t}$ (0,5)

$\theta_2(t) = \bar{\theta}_{02} e^{j\Omega t}$ (0,5)

on ajuste les deux expressions dans les 2 équations diff on trouve

$\ddot{\theta}_1(t) = -\Omega^2 \bar{\theta}_{01} e^{j\Omega t} = -\Omega^2 \theta_1(t)$

$\ddot{\theta}_2(t) = -\Omega^2 \bar{\theta}_{02} e^{j\Omega t} = -\Omega^2 \theta_2(t)$

$\Rightarrow \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\right)\bar{\theta}_{01} - \frac{1}{2}\Omega^2 \bar{\theta}_{02} = 0$ (0,5)

$-\Omega^2 \bar{\theta}_{01} + \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\right)\bar{\theta}_{02} = 0$ (0,5)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\right) & -\frac{1}{2}\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\right)^2 - \frac{1}{2}\Omega^4 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\right)^4 = \frac{1}{2}\Omega^4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1^2 = \dfrac{g}{\ell\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\ \Omega_2^2 = \dfrac{g}{\ell\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \end{cases}$$ (0,5)