Corrigé EMD MDF2. Janvier 2020.

Exercice 1.

On a la distribution de la vitesse $\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22}$

1) Calcul de l'épaisseur de déplacement (δ^*)

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22}\right) dy = y - \frac{y^{1,22}}{1,22\,\delta^{0,22}}\Big|_0^\delta$$

$$= \delta - \frac{\delta^{1,22}}{1,22\,\delta^{0,22}} = \delta\left(1 - \frac{1}{1,22}\right) = 0,18\,\delta.$$

$$\Rightarrow \delta^* = 0,18 \times 60 = 10,8\ mm. \qquad \boxed{\delta^* = 10,8\ mm}$$

2) Calcul de l'épaisseur de la quantité de mouvement θ.

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy.$$

$$\Rightarrow \theta = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22}\left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22}\right) dy = \int_0^\delta \left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,44}\right] dy.$$

$$= \frac{y^{1,22}}{1,22\,\delta^{0,22}} - \frac{y^{1,44}}{1,44\,\delta}\Big|_0^\delta = \frac{\delta^{1,22}}{1,22\,\delta^{0,22}} - \frac{\delta^{1,44}}{1,44\,\delta^{0,44}}$$

$$= \frac{\delta}{1,22} - \frac{\delta}{1,44} = 0,81\,\delta - 0,69\,\delta = 0,12\,\delta.$$

$$\Rightarrow \theta = 0,12 \times 60 = 7,2\ mm. \qquad \boxed{\theta = 7,2\ mm}$$

3) Calcul de l'épaisseur d'énergie (δ_e)

$$\delta_e = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2\right) dy.$$

$$\delta_e = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22}\left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,44}\right) dy = \int_0^\delta \left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,66}\right] d$$

$$= \left[\frac{y^{1,22}}{1,22\,\delta^{0,22}} - \frac{y^{1,66}}{1,66\,\delta^{0,66}}\right]_0^\delta = \frac{\delta^{1,22}}{1,22\,\delta^{0,22}} - \frac{\delta^{1,66}}{1,66\,\delta^{0,66}} = \frac{\delta}{1,22} - \frac{\delta}{1,6}$$

$$\delta_e = 0,217\,\delta = 0,217 \times 60 = 13,02. \Rightarrow \boxed{\delta_e = 13,02\ mm}$$

Exercice 2 :

1) . La forme adimensionnelle de la force F.

on a. $F = f(V, L, \rho, \nu)$.

nombre de variable on a $P = 5$ et $q = 3$. (M, L, T)

$p - q = 5 - 3 = 2$. produits sans dimensions π_1 et π_2

donc. $F = f(V, L, \rho, \nu) \Longrightarrow \pi_1 = \varphi\, \pi_2$.

On détermine π_1 et π_2 , on choisi les variables indépendantes (ρ, V, L)

tel que. $\pi_1 = F \rho^a V^b L^c = M^0 L^0 T^0$

$\pi_2 = \nu \rho^a V^b L^c = M^0 L^0 T^0$

$F = MLT^{-2}$

$V = L \cdot T^{-1}$

$\rho = ML^{-3}$.

$\nu = L^2 T^{-1}$.

$L : L$

$\pi_1 = MLT^{-2} \cdot (ML^{-3})^a (LT^{-1})^b (L)^c = M^0 L^0 T^0$

$$\begin{cases} M : 1 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -1} \\ L : 1 - 3a + b + c = 0 \Rightarrow 1 + 3 - 2 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = -1} \\ T : -b - 2 = 0 \Rightarrow \underline{b = -2}. \end{cases}$$

donc $\boxed{\pi_1 = \dfrac{F}{\rho V^2 L}}$

$\pi_2 = L^2 T^{-1} \cdot (ML^{-3})^a (LT^{-1})^b (L)^c = M L T^0$

M : $a + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \underline{a = 0}$

L : $2 - 3a + b + c = 0 \Rightarrow 2 - 1 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = -1}$

T : $-1 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = -1}$.

$\Rightarrow \pi_2 = \nu \cdot V^{-1} L^{-1} \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \dfrac{\nu}{VL}}$

$\Rightarrow \dfrac{F}{\rho V^2 L} = \varphi\left(\dfrac{\nu}{VL}\right) \Rightarrow \boxed{F = \rho V^2 L \cdot \varphi\left(\dfrac{\nu}{L}\right)}$

La force F sous la forme adimensionnelle.

~ 2

On a $F_m = 220$ N $\quad L_r = \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{8}$ prototype $\quad F_p$?

(modèle) $V_m = 12$ m/s. $\quad \nu_p = 13\,\nu_m$.

$\rho_1 = 810\,\rho_p$.

On a une similitude dynamique $\Rightarrow$ similitude des force et similitude du nombre de Reynolds.

$F = m a = \rho L^3 \frac{V}{T}$

$\Rightarrow \underline{F = \rho L^2 V^2}$

la force dans le model $(F_m) = \rho_m L_m^2 V_m^2$.

la force dans le prototype $(F_p) = \rho L_p^2 V_p^2$

On détermine la vitesse (V_p) du prototype ~~*~~ on fait la similitude du nombre de Reynolds. $(R_e)_m = (R_e)_p$.

$$Re_m = \frac{V_m L_m}{\nu_m}, \qquad Re_p = \frac{V_p L_p}{\nu_p}.$$

$$\Rightarrow Re_m = Re_p \Rightarrow \frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p}. \Rightarrow V_p = V_m \cdot \frac{L_m}{L_p} \cdot \frac{\nu_p}{\nu_m}.$$

$$\Rightarrow V_p = V_m \times \frac{1}{8} \times \frac{13\,\cancel{\nu_m}}{\cancel{\nu_m}} = \frac{13}{8} V_m = 1{,}625 \times 12 = 19{,}5 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_p = 19{,}5 \text{ m/s}}$$

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{\rho_m L_m^2 V_m^2}{\rho_p L_p^2 V_p^2} = \frac{810\,\cancel{\rho_p}}{\cancel{\rho_p}} \times \frac{1}{64} \times \frac{V_m^2}{V_p^2}.$$

$$\Rightarrow F_p = \frac{F_m \times V_p^2 \times 64}{810 \cdot V_m^2} = \frac{220 \times 19{,}5^2 \times 64}{810 \times 12^2} = 45{,}9 \text{ N}.$$

$$\boxed{F_p = 45{,}9 \text{ N}}$$

Exercice 3 :

On a la fonction de courant $\psi = \left(\frac{U}{L}\right) x y$, U, L des cte

1) Un écoulement admet un potentiel de vitesse $\Rightarrow$ $\text{Rot}\vec{V} = 0$. $\Rightarrow$ $\text{Rot}\vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$?

On a les composants de la vitesse : u et v tel que.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left(\frac{U}{L}\right) x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(\frac{U}{L}\right) y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

donc $\text{Rot}\vec{V} = 0 - 0 = 0$. donc $\text{Rot}\vec{V} = 0$ alors l'écoulement admet un potentiel de vitesse ϕ

2) L'expression du potentiel ϕ.

on a $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \varphi_x = \int u\, dx = \int \left(\frac{U}{L}\right) x\, dx = \frac{U}{2L} x^2 + f_1(y) + c_1$

$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \varphi_y = \int v\, dx = \int \left(\frac{U}{L}\right) y\, dy = -\frac{U}{2L} y^2 + f_1(x) + c_2$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{U}{2L}(x^2 - y^2) + C}$$

) L'expression de la fonction potentielle complexe F(z).

On a : $F(z) = \phi + i\psi$.

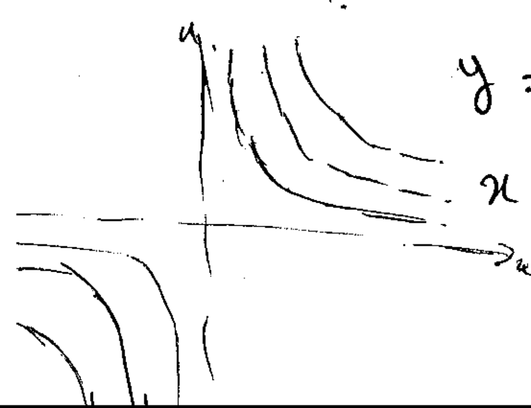
$F(z) = \frac{U}{L}(x^2 - y^2) + i\left(\frac{U}{L}\right) x y = \frac{U}{2L}(x^2 - y^2 + 2ixy)$

$$\Rightarrow \boxed{F(z) = \frac{U}{2L} z^2}$$

$z = x + iy$ le nombre complexe

) La fonction de courant passant par un point quelconque.

$\psi = \text{ste} \Rightarrow \frac{U}{L} x y = \text{Cste} \Rightarrow$



$y = \left(\frac{L}{U}\right)\frac{1}{x} \text{Cste} = \frac{C}{x}$ pour $x \neq 0$. c'est une hyperbole

$x = \frac{L}{U} \times \frac{1}{y} \text{Cste} = \frac{C}{y}$ pour $y \neq 0$ c'est une hyperbole.

s points de stagnations existent pour $u=0$, $v=0$.
c-à-d la vitesse est nulle

donc
$$u=0 \Rightarrow u=\frac{U}{L}x=0 \Rightarrow x_s=0.$$
$$v=0 \Rightarrow v=\frac{U}{L}y=0 \Rightarrow y_s=0.$$

donc $x_s=0$, et $y_s=0$ sont les points de stagnation

$St(x_s=0,\ y_s=0)$.

la fonction de courant passant par le point de stagnation $(x_s=0,\ y_s=0)$. $\psi=$ cste.

$$\psi_s=\left(\frac{U}{L}\right)x_s\cdot y_s=0 \Rightarrow \psi_s=0.$$

$$\psi=\frac{U}{L}xy=\cancel{cste}\ 0.$$