الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH

جامعة محمد بوضياف بالمسيلة

MOHAMED BOUDIAF UNIVERSITY OF M'SILA

Technology Faculty — كلية التكنولوجيا

Department of Mechanical Engineering — قسم الهندسة الميكانيكية

Corrigée d'examen : Méthodes numériques approfondies. **M'sila le** : 26/01/2020

Master 1 : Energétique – Session Normale

Année Universitaire : 2019/2020

Questions de cour : (06)*points.*

- 1) Compléter le tableau suivant

Equation	Classification de l'équation	Nom de l'équation
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$(\Delta \prec 0)$ Equation elliptique	Equation de Laplace
$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$	$(\Delta = 0)$ Equation parabolique	Diffusion de la chaleur
$\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} = 0$	$(\Delta \succ 0)$ Equation hyperbolique	Equation d'advection
$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$	$(\Delta \succ 0)$ Equation hyperbolique	Propagation d'onde

....$(1+1+1)$*pts*

- 2) A) Un schéma numérique est dit convergent s'il est à la fois stable et consistant.
(Convergence = stabilité + consistance)..............................01*pt*

B) Un schéma dit consistant si l'erreur diminue avec le pas d'approximation (x ou t)..01*pt*

C) Un schéma est dit stable si toute perturbation d'origine numérique est amortie ou au mieux non amplifiée..01*pt*

Exercice N°01 : (06)*points.*

On a $y'(t) = y(t).e^t$, $y(0) = 2$ et $h = 0.1$ Donc, on a également que $t_0 = 0, y_0 = 2$ et que $f(t_n, y_n) = y_n e^{t_n}$

Euler :

$y_1 = 2,2$..0.5*pt*

$y_2 = 2,4431376$..0.5*pt*

$y_3 = 2,741543$...0.5*pt*

Runge-Kutta $O(h^4)$:

- Première itération :

$k_1 = 0,2$; $k_2 = 0.220767$; $k_3 = 0.221859$; $k_4 = 0.245553$; $y_2 = 2.2218007$..1.5*pts*

- Deuxième itération :

$k_1 = 0,245547$; $k_2 = 0.272401$; $k_3 = 0.273961$; $k_4 = 0.304833$; $y_2 = 2.495651$..1.5*pts*

- Troisième itération :

$k_1 = 0,304820$; $k_2 = 0.340018$; $k_3 = 0.342278$; $k_4 = 0.238308$; $y_2 = 2.8377328$..1.5*pts*

Exercice N°02 **:** (8)*points.*

Considérons le problème bidimensionnel stationnaire de la conduction de la chaleur dans un domaine carré $[0, L_x]X[0, L_y]$. Le champ de température $T(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad (x,y) \in [0, L_x]X[0, L_y] \\ T(0,y) = T_g \quad et \quad T(L_x, y) = T_d \quad , \quad 0 \prec y \prec L_y \\ T(x,0) = T_b \quad et \quad T(x, L_y) = T_h \quad , \quad 0 \prec x \prec L_x \end{cases}$$

Le domaine de calcul est discrétisé en $(N+1)X(P+1)$ noeuds (x_i, y_j).
On supposera que les pas d'espace dans chaque direction Δx et Δy sont constants.
La température discrète au noeud (x_i, y_j) notée $T_{ij} = T(x_i, y_j)$.

-1) Nous utilisons un schéma centré d'ordre 2 pour approximer les dérivées secondes en espace :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{ij} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots 01pt$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{ij} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \ldots\ldots\ldots\ldots 01pt$$

-2) La formulation discrétisée est alors, pour i variant de 1 à $N-1$ et j variant de 1 à $P-1$:

$$\Delta y^2(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2(T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2)T_{i,j} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 01pt$$

-3) Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$, en posant $A = \Delta x^2 + \Delta y^2$:

$$\begin{bmatrix} -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_b \\ \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_d \\ \Delta y^2 T_g \\ 0 \\ \Delta y^2 T_d \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_h \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_d \end{bmatrix} 2.5pts$$

-4) Dans le cas où les pas d'espace sont identiques $\Delta x = \Delta y$, la formulation devient, pour i variant de 1 à $N-1$ et j variant de 1 à $P-1$:

$$T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 01pt$$

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_b + T_g \\ T_b \\ T_b + T_d \\ T_g \\ 0 \\ T_d \\ T_h + T_g \\ T_h \\ T_h + T_d \end{bmatrix}$$ 1.5*pts*

***Enseignant** : Djerad Abdelkader*