

Corrigé type d'épreuve du 3^{eme} semestre

Exercice 01: (5pts=01+01+01+01+01)

1. A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = e > 1$, La série de terme général u_n diverge. ($\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum u_n$ diverge)

B) $\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^7} \sim \frac{2^4}{7^7} \times \frac{1}{n^{10}}$, Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 10 > 1$.

C) $(-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (-1)^n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

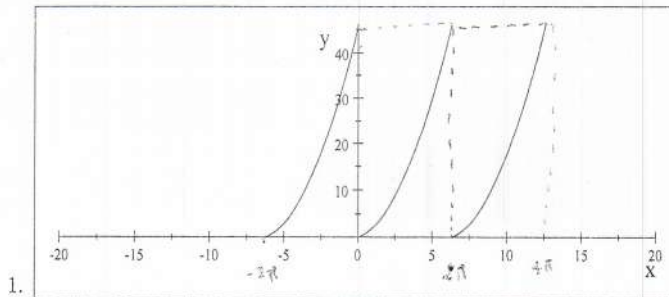
$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ est positif, décroissant et tend vers 0, d'après le critère de Leibniz la série converge.

2. A) Prendre $u_n = n + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = -n$ Pour $n \geq 1$.

La série $\sum (u_n + v_n)$ converge mais les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent; car: les termes généraux ne tendent pas vers 0.

B) On a vu dans le cours que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument: $\sum \frac{1}{n}$.

Exercice 02: (7pts=01.5+03.5+01+01)



2. $T = 2\pi \implies L = \pi$ et $\alpha = 0$. Alors

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t + t^2 dt = \frac{8\pi^2}{3} + 2\pi. \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (t + t^2) \cos(nt) dt = \frac{4}{n^2}. \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (t + t^2) \sin(nt) dt = -\frac{4\pi + 2}{n}.\end{aligned}$$

Donc

$$S_n(t) = \frac{4\pi^2}{3} + \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nt - \frac{4\pi + 2}{n} \sin nt \right).$$

3. La fonction S_n prend la même valeur que f en tout point où cette dernière fonction est continue. En particulier

$$\begin{aligned}S_n(\pi) &= \frac{4\pi^2}{3} + \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \cos n\pi \\ &= f(\pi) = \pi + \pi^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4. Remplaçons cette fois t par 0. Comme f n'est pas continue en ce point,

$$S_n(0) = \frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = 2\pi^2 + \pi.$$

D'autre part,

$$S_n(0) = \frac{4\pi^2}{3} + \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Finalement,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 03: (Spts=01+01+01.5+02.5+02)

1. Trouver l'image par transformation de Laplace de:

$$\begin{aligned}
 A) f(t) &= 2t + e^{3t} \cos(3t) + \sin(t) \cos(2t) \\
 &= 2t + e^{3t} \cos(3t) + \frac{1}{2} (\sin 3t - \sin t) \\
 \Rightarrow F(s) &= \frac{2}{s^2} + \frac{s-3}{(s-3)^2+9} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{s^2+9} - \frac{1}{s^2+1} \right) \\
 B) g(t) &= (1+4 \cos(3t))^2 \\
 &= 9 + 8 \cos 3t + 8 \cos 6t, \\
 \Rightarrow G(s) &= \frac{9}{s} + \frac{8s}{s^2+9} + \frac{8s}{s^2+36}.
 \end{aligned}$$

2. A) Trouver la décomposition en éléments simples de $\frac{2s-2}{s^2-s-2}$. (admet deux poles réels $-1, 2$). On pose

$$\begin{aligned}
 \frac{2s-2}{s^2-s-2} &= \frac{2s-2}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} \\
 2s-2 &= A(s-2) + B(s+1),
 \end{aligned}$$

- $s = -1 \Rightarrow A = \frac{4}{3}$,
- $s = 2 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$,

Alors

$$\frac{2s-2}{s^2-s-2} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{s+1} + \frac{2}{s-2} \right).$$

B) Trouver la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}$. (admet trois poles réels $-1, 2$ et 1). On pose

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} \\
 1 &= A(s-2)(s-1)^2 + B(s+1)(s-1)^2 + C(s+1)(s-2)(s-1) \\
 &\quad + D(s+1)(s-2),
 \end{aligned}$$

- $s = -1 \Rightarrow A = \frac{-1}{12}$,
- $s = 2 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$,
- $s = 1 \Rightarrow D = \frac{-1}{2}$,

Ce qui détermine trois constantes, pour obtenir, on compare les termes en s^3

$$\begin{aligned}
 1 &= A+B+C \\
 \Rightarrow C &= \frac{-1}{4}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{(s^2 - s - 2)(s - 1)^2} = \frac{-1}{12} \left(\frac{1}{s + 1} - \frac{4}{s - 2} \right) + \frac{-1}{4} \left(\frac{1}{s - 1} + \frac{2}{(s - 1)^2} \right).$$

C) Par la transformation de Laplace, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u''(t) - u'(t) - 2u(t)) &= \mathcal{L}(te^t), \\ (s^2 - s - 2) \mathcal{L}(u(t)) &= \frac{1}{(s - 1)^2} + 2s - 2, \\ \mathcal{L}(u(t)) &= \frac{1}{(s^2 - s - 2)(s - 1)^2} + \frac{2s - 2}{(s^2 - s - 2)}, \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{5}{4} \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s - 2} - \frac{1}{4} \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(s - 1)^2},$$

par la transformation inverse de Laplace, on peut alors conclure que la solution est:

$$u(t) = \frac{5}{4} e^{-t} + e^{2t} - \frac{2t + 1}{4} e^t.$$