Examen final : Math 3

Exercice 1 : (2+2=4pts)

1) Quelle est la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{2^{(n-1)} \prod_{k=1}^{n} k}, \sum_{n\geq 1} (-1)^n sin\frac{n}{2^n}$$

2) Trouver le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{2n+3} x^{2n}$ et calculer sa somme

Exercice 2: (1+4+1+1+1=8pts)

Soit f la fonction 2π périodique définie par : $f(x) = \sup(\sin x\,, 0) \quad sur\ ]-\pi, \pi]$

1) Tracer le graphe de la fonction f sur $]-3\pi, 3\pi]$

2) Écrire la série de Fourier S associée à f

3) Trouver sa somme de Fourier

4) Déduire la valeur de : $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{4K^2-1}$

5) g fonction 2π périodique définie par : $g(x) = f(x).sinx$

   Déduire les coefficients de Fourier de g en fonction des coefficients de f

Exercice 3: (2+2+1+3=8pts)

1) Trouver l'image par la transformation de Laplace des fonctions :

$$f(t) = t^2 \sin t + e^{3t}.cos\beta.\sin(\alpha t + \beta)$$

2) Trouver la fonction f vérifie : $f(t) = e^{-t} + \int_0^t \sin(t-x) f(x)dx$

3) Trouver l'origine de : $F(p) = e^{3p}(\frac{P+1}{(p^2+2p+3)(p^2-1)})$

4) Résoudre l'équation différentielle suivante, on utilisant la transformation de Laplace :

$$\begin{cases} y'' + 4y = te^t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

Corrigé type de (math3)

Exercice1 : (4points)

1) **A/** $\sum_{n\geq1}\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{2^{(n-1)}\prod_{k=1}^{n}k}=\sum_{n\geq1}\frac{n(n+1)}{2^n n!}$ Il est claire qu'elle est à termes positifs. En utilisent le

(1pts) critère de D'Alembert et on pose : $U_n=\frac{n(n+1)}{2^n n!}$donc : $U_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}(n+1)!}$

Alors : $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{2^n n!}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{2n(n+1)}=0<1$; donc **la série est converge**

B/ $\sum_{n\geq1}(-1)^n sin\frac{n}{2^n}=\sum_{n\geq1}U_n$. $|U_n|=sin\frac{n}{2^n}$En utilisant le critère d'équivalence on

(1pts) aura que : $sin\frac{n}{2^n}\sim\frac{n}{2^n}$. la série $\sum_{n\geq1}\frac{n}{2^n}$ est converge car : $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}<1$

Alors :$\sum_{n\geq1}sin\frac{n}{2^n}\ conv\Rightarrow\boldsymbol{\sum_{n\geq1}(-1)^n sin\frac{n}{2^n}\ abs\ conv}$

2) $\sum_{n\geq0}\frac{3^n}{2n+3}x^{2n}$ donc $a_n=\frac{3^n}{2n+3}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{2n+5}$

(0,5 pts) **A/** R=$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2n+3}\frac{2n+5}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}$

B/ $\sum_{n\geq0}\frac{3^n}{2n+3}x^{2n}=\frac{1}{x^3}\sum_{n\geq0}\frac{3^n}{2n+3}x^{2n+3}$

(0,5pts) S=$\sum_{n\geq0}\frac{3^n}{2n+3}x^{2n+3}\Rightarrow S'=\sum_{n\geq0}3^n x^{2n+2}=x^2\sum_{n\geq0}3^n x^{2n}=x^2\frac{1}{1-3x^2}$

tel que :$|3x^2|<1\ \Rightarrow|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$

(1pts)**Donc : S=**$\int\frac{x^2}{1-3x^2}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{-1+1-3x^2}{1-3x^2}dx=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{-1}{1-3x^2}+1\right)dx$

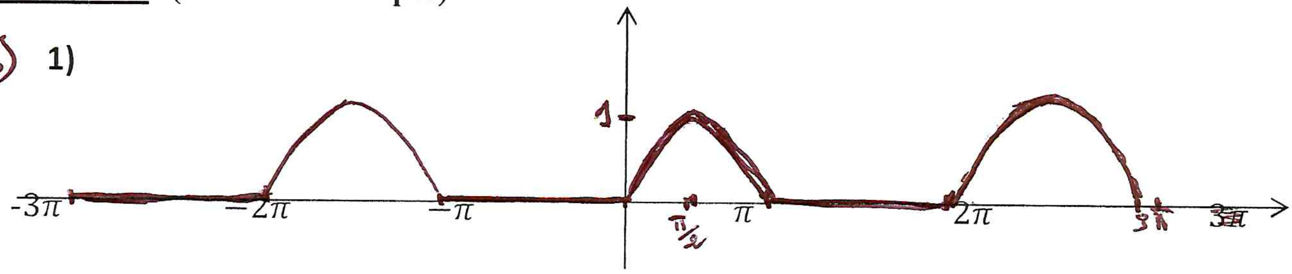
$=-\frac{1}{3}\left[x-\int\left(\frac{1}{1-3x^2}\right)dx\right]=-\frac{1}{3}\left[x-\int\left(\frac{1}{1-3x^2}\right)dx\right]$

$=-\frac{1}{3}\left[x-\int\left(\frac{1}{1-3x^2}\right)dx\right]=-\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\ln(\frac{1+\sqrt{3}x}{1-\sqrt{3}\,x})\right)\right]$

On obtient :$\sum_{n\geq0}\frac{3^n}{2n+3}\boldsymbol{x^{2n}}=-\frac{1}{3x^3}\left[\boldsymbol{x}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\boldsymbol{\ln}(\frac{1+\sqrt{3}x}{1-\sqrt{3}\,x})\right)\right]$

Exercice 2: (1+4+1+1+1=8pts)

(1pts) **1)**



(4pts) **2)** $a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\ dt = \frac{2}{\pi}$ (0,5)

$a_1 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,.\cos t\, dt = 0$ (0,5)

$\forall n \neq 1$:

$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos n t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,.\cos nt\, dt = \frac{[1+(-1)^n]}{\pi}(\frac{1}{1-n^2})$ (1)

$$\boldsymbol{a_n} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4k^2} & \boldsymbol{si\ n = 2k} \\ 0 & \boldsymbol{si\ n = 2k+1} \end{cases}$$ (0,5)

$\forall n \neq 1$:

$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sin n t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,.\sin nt\, dt = 0\ \ donc\ \boldsymbol{b_n} = \boldsymbol{0}$ (0,5)

$b_1 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sin\ t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,.\sin t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2\pi}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right] = \frac{1}{2}$ 1

On obtient :

$$S_f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{sint}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 1} \frac{1}{1-4k^2}\, cos2kt$$

3) Si on note par s(t) sa somme de Fourier d'après le théorème Dirichlet :

F est continu $\forall t \in R \Rightarrow f(t) = s(t)$ (1 pts)

4) Si t= π:

(1pts)

$$S_f(\pi) = \frac{1}{\pi} + \frac{sin\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{1-4k^2}\, cos2k\pi$$

$$S_f(\pi) = 0 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{1-4k^2} \Rightarrow \sum_{k\geq 1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4k^2-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

5)

(1pts)

g fonction 2π périodique définie par : $g(x) = f(x).sinx$

$$a_{0(g)} = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\ dt = b_1(f) = \frac{1}{2}$$

$\forall n \neq 1$:

$$a_{n(g)} = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\ cos\ nt\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+1)t + \sin(1-n)t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[b_{(n+1)}(f) + b_{(1-n)}(f)\right]$$

$$b_{n(g)} = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\ sin\ nt\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos(1-n)t - \cos(1+n)t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[a_{(1-n)}(f) - a_{(n+1)}(f)\right]$$

Exercice 3: (2+2+1+3=8pts)

1) $F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(t^2\sin t + e^{3t}.cos\beta.\sin(\alpha t + \beta))$

(1pts) $$\mathcal{L}(t^2\sin t)(p) = \left(\frac{1}{p^2+1}\right)'' = 2\frac{3p^2-1}{(p^2+1)^3}$$

(1pts) $$\mathcal{L}(e^{3t}.cos\beta.\sin(\alpha t+\beta)) = cos\beta\,.\mathcal{L}(e^{3t}.\sin(\alpha t+\beta))$$

$$= cos\beta\,.\mathcal{L}(e^{3t}.(\sin(\alpha t).cos\beta + \sin\beta\,.cos(\alpha t)))$$

$$= cos\beta\left[cos\beta.\frac{\alpha}{(p-3)^2+\alpha^2} + \sin\beta.\frac{(p-3)}{(p-3)^2+\alpha^2}\right]$$

Alors : $F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = 2\frac{3p^2-1}{(p^2+1)^3} + \cos\beta\left[\cos\beta.\frac{\alpha}{(p-3)^2+\alpha^2} + \sin\beta.\frac{(p-3)}{(p-3)^2+\alpha^2}\right]$

2) $\mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{L}\left(e^{-t} + \int_0^t \sin(t-x)\, f(x)dx\right) = \frac{1}{p+1} + \mathcal{L}(f(t))(p).\frac{1}{p^2+1}$

(2pts)

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f(t))(p) = \left(1+\frac{1}{P^2}\right).\frac{1}{p+1} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{P^2(p+1)} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{p+1} + \frac{A}{P^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1} = \frac{2}{p+1} + \frac{1}{P^2} - \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow f(t) = 2e^{-t} + t - 1 \quad (1)$$

3) $F(p) = e^{3p}\left(\frac{P+1}{(p^2+2p+3)(p^2-1)}\right) = e^{3p}\left(\frac{\cancel{P+1}}{(p^2+2p+3)(p-1)\cancel{(p+1)}}\right) = e^{3p}\left(\frac{1}{(p^2+2p+3)(p-1)}\right)$

$$= e^{3p}\left(\frac{Ap+B}{(p^2+2p+3)} + \frac{C}{(p-1)}\right) = e^{3p}\left(\frac{(-\frac{1}{6})p-\frac{1}{2}}{(p^2+2p+3)} + \frac{\frac{1}{6}}{(p-1)}\right)$$

(2pts)

$$\frac{\left(-\frac{1}{6}\right)p-\frac{1}{2}}{(p^2+2p+3)} + \frac{\frac{1}{6}}{(p-1)} = -\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)p+1}{(p+1)^2+2} + \frac{\frac{1}{6}}{(p-1)} \quad (1)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)p+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{(p+1)^2+2} + \frac{\frac{1}{6}}{(p-1)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)p+\frac{1}{3}}{(p+1)^2+2} + \frac{\frac{2}{3}}{(p+1)^2+2}\right) + \frac{\frac{1}{6}}{(p-1)}$$

$$\leftarrow f(t) = -\frac{1}{6}\left[e^{-t}\cos\sqrt{2}t\right] - \frac{1}{3\sqrt{2}}\left[e^{-t}\sin\sqrt{2}t\right] + \frac{1}{6}e^{t} \quad (1)$$

$$\Rightarrow F(p) = e^{3p}\left(\frac{P+1}{(p^2+2p+3)(p^2-1)}\right) \leftarrow f(t+3) =$$

$$= -\frac{1}{6}\left[e^{-(t+3)}\cos\sqrt{2}(t+3)\right] - \frac{1}{3\sqrt{2}}\left[e^{-t}\sin\sqrt{2}(t+3)\right] + \frac{1}{6}e^{(t+3)}$$

(3pts) 4)

$$\begin{cases} y'' + 4y = te^t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(y''+4y=te^t) \Rightarrow \mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(te^t)$$

$$\Rightarrow p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$\Rightarrow p^2\mathcal{L}(y) - p - 1 + 4\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(p-1)^2} \Rightarrow (p^2+4)\mathcal{L}(y) = p + 1 + \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{p+1}{(p^2+4)} + \frac{1}{(p^2+4)(p-1)^2} \quad (1)$$

$$= \frac{p}{(p^2+4)} + \frac{1}{(p^2+4)} + \frac{Ap+B}{(p^2+4)} + \frac{C}{(p-1)^2} + \frac{D}{\mathrm{p}-1}$$

$$= \frac{p}{(p^2+4)} + \frac{1}{(p^2+4)} + \frac{\frac{1}{4}p}{(p^2+4)} + \frac{\frac{1}{5}}{(p-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{\mathrm{p}-1} \quad (1)$$

$$\leftarrow \boldsymbol{f(t) = \frac{5}{4}\cos 2t + \frac{1}{2} sin2t + \frac{1}{5} te^{t} - \frac{1}{4} e^{t}} \quad (1)$$