Université MOHAMED BOUDIAF de M'SILA
Faculté de Technologie

Année universitaire 2019/2020
Département : Electronique
Durée : 1h30min

Epreuve de Ondes et Vibrations

Questions de cours (6pts)

1. La pulsation propre d'un système constitué d'un ressort k=100N/m et d'une masse m=0.5kg est
   a) 14.14 rad. s^{-1}, b) 22 rad. s^{-1}, c) 16 rad. s^{-1}
2. La pulsation propre d'un circuit LC tel que L=20 mH et C=800 pF est
   a) 3.10^{-6} rad. s^{-1}, b) $0.25.10^{6}$ rad. s^{-1}, c) $0.25.10^{5}$ rad. s^{-1}
3. La force de frottement visqueux est proportionnelle à :
   a) La vitesse, b) l'élongation, c) l'accélération.
4. La condition de résonance d'un système amorti en régime forcé est :
   a) $\xi = 1/\sqrt{2}$, b) $\xi < 1/\sqrt{2}$, c) $\xi < 1$.
5. Pour entretenir des oscillations dans un système amorti il faut :
   a) Appliquer une force extérieure, b) augmenter l'élongation initiale, c) ne rien faire
6. La largeur de la bande passante $\Delta\omega$ est :
   a) 2ξ, b) 2δ, c) 2Q

Exercice N°1 (7pts)

Une masse m est soudée à l'extrémité d'une tige de longueur l et de masse négligeable (Figure 1). L'autre extrémité du fil est articulée au point O. La tige est liée au point A à un Bâti (**B₁**) par un ressort de raideur k_1. Au point B, la tige est reliée à un Bâti (**B₂**) par un ressort de raideur k_2. La masse m est liée au Bâti (**B₂**) par un amortisseur de coefficient de frottement α. $OA=l/3$, $OB=2l/3$ et $OC=l$.

1- Calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.
2- Déduire le Lagrangien.
3- Trouver l'équation différentielle du mouvement.
4- Déterminer la solution de l'équation différentielle dans le cas d'un faible amortissement, le coefficient d'amortissement δ, la pulsation propre ω_0 et la pseudo-pulsation ω_a.

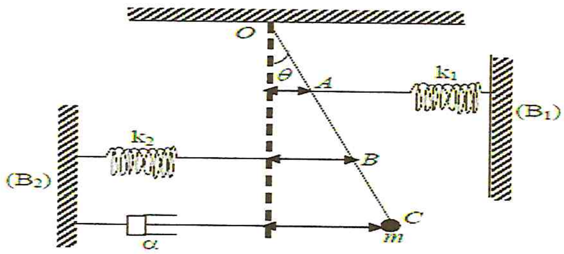

Figure 1

Exercice N°2 (7pts)

On représente le système mécanique comme suit :

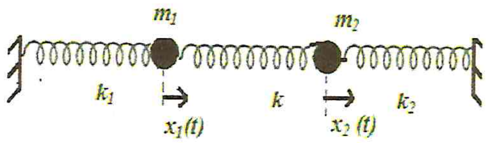

Figure 2

1- Déterminer le Lagrangien du système
2- Etablir les équations différentielles du mouvement.
3- En déduire les modes fondamentales

On pose les paramètres suivants : $k_1=k_2=k$ et $m_1=m_2=m$.

4- Etablir les nouvelles équations différentielles du mouvement.
5- En déduire les pulsations propres
6- Donner les solutions générales.

Bonne chance

Solution OV (2019-2020)

Réponse aux questions de cours

1- a), 2- b), 3- a), 4- b), 5- a), 6- b),

1 1 1 1 1 1

Exercice N°1

1.1-L'énergie potentielle

$$U = U_{k_1} + U_{k_2} + U_m$$

$$U_{k_1} = \frac{k_1}{2}(x_0 + x)^2 = \frac{k_1}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k_1}{2}x_0^2$$

$$U_{k_1} = \frac{k_1}{2}x^2 + k_1 xx_0 + \frac{k_1}{2}x_0^2 + cte$$

$$\sin\theta = \frac{x}{OA} = \frac{x}{\frac{l}{3}} \Rightarrow x = \frac{l}{3}\sin\theta$$

$$U_{k_1} = \frac{k_1}{2}x^2 + k_1 xx_0 + cte = \frac{k_1}{2}\left(\frac{l}{3}\sin\theta\right)^2 + k_1\left(\frac{l}{3}\sin\theta\right)x_0 + cte$$

$$U_{k_2} = \frac{k_2}{2}x^2 + k_2 xx_0 + cte$$

$$\sin\theta = \frac{x}{OB} = \frac{x}{\frac{2l}{3}} \Rightarrow x = \frac{2l}{3}\sin\theta$$

$$U_{k_2} = \frac{k_2}{2}x^2 + k_2 xx_0 + cte = \frac{k_2}{2}\left(\frac{2l}{3}\sin\theta\right)^2 + k_2\left(\frac{2l}{3}\sin\theta\right)x_0 + cte$$

$$U_m = mgh$$

$$h = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta)$$

$$U_m = mgl(1-\cos\theta)$$

Alors

$$U = \frac{k_1}{2}\left(\frac{l}{3}\sin\theta\right)^2 + k_1\left(\frac{l}{3}\sin\theta\right)x_0 + \frac{k_2}{2}\left(\frac{2l}{3}\sin\theta\right)^2 + k_2\left(\frac{2l}{3}\sin\theta\right)x_0 + mgl(1-\cos\theta) + cte$$

A faible amplitude $\sin\theta \approx \theta \; et \; co\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$U=\frac{k_1}{2}\left(\frac{l}{3}\theta\right)^2+k_1\left(\frac{l}{3}\theta\right)x_0+\frac{k_2}{2}\left(\frac{2l}{3}\theta\right)^2+k_2\left(\frac{2l}{3}\theta\right)x_0+mgl\left(1-\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right)+cte$$

$$U=\frac{1}{2}\left(k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2+k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2+mgl\right)\theta^2+\left(k_1\left(\frac{l}{3}\right)+k_2\left(\frac{2l}{3}\right)\right)x_0\theta+cte$$

Equilibre

$$\left.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}=0\Rightarrow\left(k_1\left(\frac{l}{3}\right)+k_2\left(\frac{2l}{3}\right)\right)x_0=0$$

$$U=\frac{1}{2}\left(k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2+k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2+mgl\right)\theta^2+cte$$ 1

1.2-L'énergie cinétique

$$T=T_m=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,\dot{x}=l\dot{\theta}$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$ 1

2-Le Lagrangien du système s'écrit :

$$L=T-U=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}\left(k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2+k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2+mgl\right)\theta^2+cte$$ 1

3-L'équation de Lagrange pour un système amortie est $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)+\left(\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}\right)=0$

$$D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2=\frac{1}{2}\alpha\left(l\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2\Rightarrow\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}=\alpha l^2\dot{\theta}$$ 1

$$ml^2\ddot{\theta}+\left(k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2+k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2+mgl\right)\theta+\alpha l^2\dot{\theta}=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{\left(k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2+k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2+mgl\right)}{ml^2}\theta+\frac{\alpha l^2}{ml^2}\dot{\theta}=0$$ 0,5

4- Pour les faibles amortissements

4.1- $\theta(t)=Ae^{-\delta t}\cos(\omega_a t+\varphi)$ 0,5

Par analogie avec :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \dfrac{\left(k_1\left(\dfrac{l}{3}\right)^2 + k_2\left(\dfrac{2l}{3}\right)^2 + mgl\right)}{ml^2}\theta + \dfrac{\alpha}{m}\dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\delta\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$ (0,5)

4.2- La pulsation propre :

$$\omega_0^2 = \frac{\left(k_1\left(\dfrac{l}{3}\right)^2 + k_2\left(\dfrac{2l}{3}\right)^2 + mgl\right)}{ml^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{\left(k_1\left(\dfrac{l}{3}\right)^2 + k_2\left(\dfrac{2l}{3}\right)^2 + mgl\right)}{ml^2}}$$ (0,5)

4.3- Le coefficient d'amortissement : $2\delta = \dfrac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \dfrac{\alpha}{2m}$ (0,5)

4.4- La pseudo pulsation : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (0,5)

Exercice N°2 (07pts)

Pour l'énergie cinétique on a s'écrit comme suit :

$$E_c = T = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$ (0,5)

Pour l'énergie potentielle on a :

$$E_p = U = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}k_i x_i^2 = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$ (0,5)

1-Le Lagrangien s'écrit :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 + kx_1x_2$$ (01)

2- $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1, \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -k_1x_1 - kx_1 + kx_2 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2, \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -k_2x_2 - kx_2 + kx_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k + k_2)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{(k_1 + k)}{m_1}x_1 - \dfrac{k}{m_1}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{(k + k_2)}{m_2}x_2 - \dfrac{k}{m_2}x_1 = 0 \end{cases}$$ (01)

3-Les pulsations propres :

On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$.

$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

Pour trouver ω, utilisons la représentation complexe :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \tilde{x}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \tilde{x}_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\omega^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} + \dfrac{(k_1 + k)}{m_1} \tilde{A}_1 e^{j\omega t} - \dfrac{k}{m_1} \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = 0 \\ -\omega^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} + \dfrac{(k + k_2)}{m_2} \tilde{A}_2 e^{j\omega t} - \dfrac{k}{m_2} \tilde{A}_1 e^{j\omega t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{(k_1 + k)}{m_1}\right) \tilde{A}_1 - \left(\dfrac{k}{m_1}\right) \tilde{A}_2 = 0 \\ -\left(\dfrac{k}{m_2}\right) \tilde{A}_1 + \left(-\omega^2 + \dfrac{(k + k_2)}{m_2}\right) \tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\omega^2 + a)\tilde{A}_1 - b\tilde{A}_2 = 0 \\ -c\tilde{A}_1 + (-\omega^2 + d)\tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

(0,5)

$$a = \frac{k + k_1}{m_1}, b = \frac{k}{m_1}, c = \frac{k}{m_2}, d = \frac{k + k_2}{m_2}.$$

Pour que l'équation soit vraie sans que $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ soient tous les deux nuls, il faut que son *déterminant caractéristique* soit nul :

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} (-\omega^2 + a) & -b \\ -c & (-\omega^2 + d) \end{vmatrix} = (-\omega^2 + a)(-\omega^2 + d) - (-c)(-b) = 0$$

$$\Delta(\omega) = \omega^4 - \omega^2 d - \omega^2 a + ad - bc = \omega^4 - (d + a)\omega^2 + (ad - bc) = 0$$

(0,5)

Ceci nous donne *l'équation caractéristique* :

$$\omega^4 - (d + a)\omega^2 + (ad - bc) = 0$$

Premier mode propre : Pour $\omega = \omega_1$, le système implique que :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + a)\tilde{A}_1 - b\tilde{A}_2 = 0 \\ -c\tilde{A}_1 + (-\omega^2 + d)\tilde{A}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\omega^2 + a)\tilde{A}_1 = b\tilde{A}_2 \\ (-\omega^2 + d)\tilde{A}_2 = c\tilde{A}_1 \end{cases}$$

$$\frac{\tilde{A}_1(1)}{\tilde{A}_2(1)}=\frac{-\omega_1^2+d}{c}>0.\quad \begin{cases} x_{1(1)}=A_{1(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi) \\ x_{2(1)}=A_{2(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi) \end{cases}$$ (0,25)

Deuxième mode propre : Pour $\omega=\omega_2$, le système implique que :

$$\frac{\tilde{A}_1(2)}{\tilde{A}_2(2)}=\frac{-\omega_2^2+d}{c}<0.\quad \begin{cases} x_{1(2)}=A_{1(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi) \\ x_{2(2)}=-A_{2(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi) \end{cases}$$ (0,25)

4- Les nouvelles équations différentielles du mouvement

$k_1=k_2=k$ et $m_1=m_2=m$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2+\frac{2k}{m}\right)\tilde{A}_1-\left(\frac{k}{m}\right)\tilde{A}_2=0 \\ -\left(\frac{k}{m}\right)\tilde{A}_1+\left(-\omega^2+\frac{2k}{m}\right)\tilde{A}_2=0 \end{cases}$$ (0,1)

5- Les pulsations propres $\Delta(\omega)=\begin{vmatrix} \left(-\omega^2+\frac{2k}{m}\right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \left(-\omega^2+\frac{2k}{m}\right) \end{vmatrix}=0$ on pose $\omega_0^2=\frac{k}{m}$

$$\Delta(\omega)=\begin{vmatrix} (-\omega^2+2\omega_0^2) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (-\omega^2+2\omega_0^2) \end{vmatrix}=0$$ (0,5)

$$\Delta(\omega)=(-\omega^2+2\omega_0^2)(-\omega^2+2\omega_0^2)-(\omega_0^2)(\omega_0^2)=0$$

$$(-\omega^2+2\omega_0^2)^2=\omega_0^4$$

Alors $\omega_1=\omega_0$ *et* $\omega_2=\sqrt{3}\omega_0$ (0,5)

6-Les solutions générales:

$$\begin{cases} x_1=A_{1(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi)+A_{1(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi) \\ x_2=A_{2(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi)+A_{2(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi) \end{cases}$$ (0,5)