Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Départements de Génie Civil , Hydraulique
Année Universitaire 2019-2020

Module : **Probabilités et Statistiques**
Durée : **1h : 30m**

Examen du 3ième semèstre

N.B. : Toutes les calculettes sont autorisées (tél. portables et documents interdits).

Exercice n°1 : (5points)

a) Soient A et B deux événements de l'univers Ω.

Montrer que : $P(B-A) = P(B) - P(B \cap A)$.

b) Soit X une variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{4}$ et $n = 3$.
Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

c) La moyenne d'une série statistique $x_1, x_2 ..., x_i ..., x_p$ d'effectifs associés $n_1, n_2, ..., n_i ..., n_p$ est le nombre $\bar{x} = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i x_i}{N}$. avec $N = n_1 + n_2 + ... + n_p$.

Posons $z_i = ax_i + b, \forall i \in \{1, 2, ..., p\}$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\bar{z} = a\bar{x} + b$.

Exercice N°2 :(6 points)

Le tableau suivant donne la distance de freinage d'un véhicule roulant sur route sèche en fonction de sa vitesse :

x_i (vitesse en km/h)	40	50	60	70	80	90	100	110
y_i (distance en m)	8	12	18	24	32	40	48	58

a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal.

b) L'ajustement affine vous parait-il justifié ? justifiez la réponse.

c) Calculer la vitesse moyenne et la distance moyenne.

d) En utilisant la méthode des moindres carrées, déterminer l'équation de la droite représentant la distance en fonction de la vitesse.

e) Estimer, à l'aide de cette équation, la distance de freinage d'un véhicule roulant à 120km/h .

Exercice N°3 (3 points) :

Trois machines A, B et C produisent respectivement 60 % , 30 % et 10 % du nombre total de pièces fabriquées dans une usine.

Les pourcentages de pièces défectueuses produites par ces machines sont de 5 %, 4 % et 3 %. On prend une pièce au hasard, calculer la probabilité :

a) qu'une pièce soit défectueuse.

b) qu'une pièce défectueuse provienne de A.

Exercice N°4 (6 points)

On jette une pièce de monnaie 3 fois. Soit **X** le nombre de piles obtenus.

a) Déterminer l'Univers Ω de cette expérience aléatoire.

b) Déterminer la loi de probabilité de **X**, son espérance E(X) et sa variance Var(X).

c) Posons $Z = 3X - 4$. En déduire $E(Z)$, Var(Z).

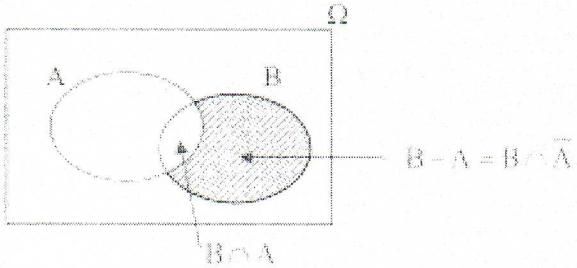
Bon courage

Université Mohamed Boudiaf - M'sila Année Universitaire 2019-2020
Faculté des Sciences et Technologies
Départements de Génie Civil , Hydraulique
Module: Probabilités et Statistiques

Corrigée-type

Exercice N°01(5 points):

a) $(B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A) = B$ et $(B \cap \bar{A}) \cap (B \cap A) = \varnothing$



Donc

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left((B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A)\right) \\ &= P\left(B \cap \bar{A}\right) + P(B \cap A) \\ &\Rightarrow P\left(B \cap \bar{A}\right) = P(B) - P(B \cap A) \end{aligned}$$

b) $X \hookrightarrow B(n, p)$, alors

$$E(X) = np = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

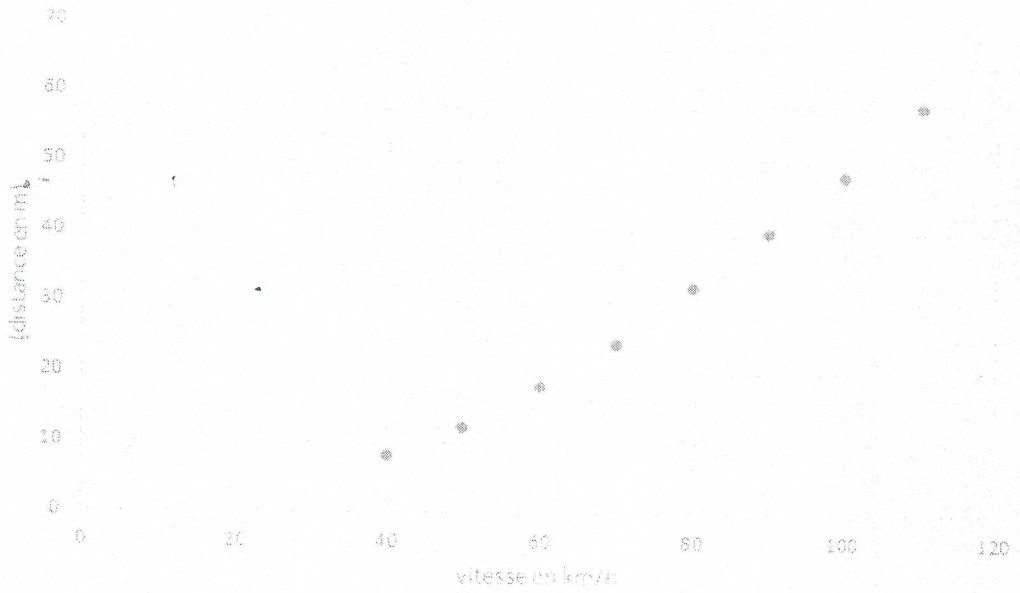
$$et\ V(X) = np(1-p) = \frac{3}{4}\frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

c) $\bar{x} = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i x_i}{N}$, posons $z_i = ax_i + b, \forall i \in \{1, 2, ..., p\}$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Alors,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i z_i}{N} = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i (ax_i + b)}{N} = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i a x_i + n_i b}{N} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i a x_i}{N} + \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i b}{N} = a \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i x_i}{N} + b \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{N} \\ &= a\bar{x} + b \end{aligned}$$

Exercice N°02 (6 points)



a) Le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal

b) Le nuage de points est trés allongé, l'ajustement affine est justifié

c) La vitesse moyenne

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{8} \frac{x_i}{8} = \frac{40+50+60+70+80+90+100+110}{8} = 75$$

La distance moyenne

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{8} \frac{y_i}{8} = \frac{8+12+18+24+32+40+48+58}{8} = 30$$

d) L'équation de la droite représentant la distance en fonction de la vitesse $(D) : y = ax + b$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{8} \frac{x_i^2}{8} - \bar{x}^2 = \frac{40^2+50^2+60^2+70^2+80^2+90^2+100^2+110^2}{8} - 75^2 = 525$$

$$Cov\,(x,y) = \sum_{i=1}^{8} \frac{x_i y_i}{8} - \bar{x}\bar{y}$$

$$= \frac{40 \times 8 + 50 \times 12 + 60 \times 18 + 70 \times 24 + 80 \times 32 + 90 \times 40 + 100 \times 48 + 110 \times 58}{8} - 75 \times 30$$

$$= 377,5$$

$$a = \frac{Cov(x,y)}{V(X)} = \frac{377,5}{525} = 0,719\,05 \approx 0,72.$$

Le point moyen $G(\bar{x}, \bar{y}) \in (D)$, alors $\bar{y} = a\bar{x} + b$ par suite

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 30 - 0,72 \times 75 = -24$$

Donc

$$(D) : y = 0,72x - 24$$

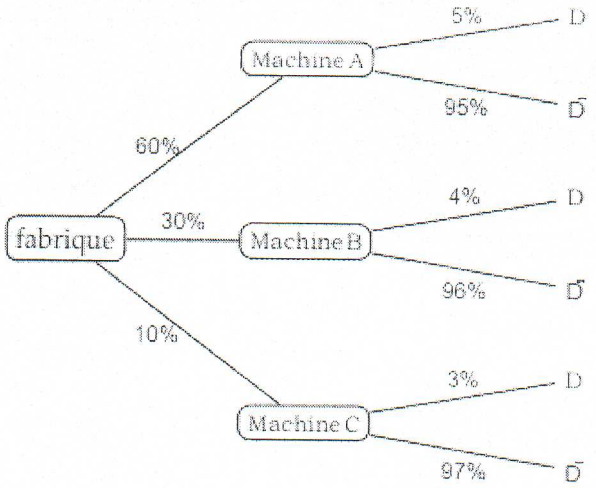
e) La distance de freinage d'un véhicule roulant à 120km/h c-à-d x=120, donc $y = 0,72 \times 120 - 24 = 62,4m$.

Exercice N°03: (3 points)

Soit D l'événement la pièce est défectueuse et $\bar{D}$, l'événement la pièce n'est pas défectueuse.

$P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,3$; $P(C) = 0,1$;

$P(D/A) = 0,05$; $P(D/B) = 0,04$; $P(D/C) = 0,03$.



a) $P(D) = 0.6 \times 0.05 + 0.3 \times 0.04 + 0.1 \times 0.03 = 0.045 = 4.5\%$.

b) $P(A \cap D) = 0.6 \times 0.05 = 0.03$,

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.03}{0.045} = 0.666\,67 \approx 66.7\%$$