Master 1 : INST & ESER

M'sila le 27/01/2020

Examen « Traitement avancé du signal »

Exercice#1 :

Soit un système linéaire invariant dans le temps définie par sa réponse impulsionnelle $h(n)$.

Pour $x(n) = u(n)$ et $h(n) = a^n u(n)$ avec $0<a<1$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

1- Calculer $Y(z)$.

2- Quelles sont les pôles, les zéros et la région de convergence.

3- Trouver $y(n)$.

Exercice#2 :

On veut réaliser un filtre RII. On prend le filtre de Butterworth avec les spécifications suivantes :

- Une atténuation dans la bande passante de 1dB à $\Omega = \Omega_p = 0.2\pi$.
- Une atténuation dans la bande d'arrêt de 15dB à $\Omega = \Omega_s = 0.3\pi$.

1- Déterminer N et Ω_c utilisant la méthode de l'invariance impulsionnelle.

2- Représenter et déterminer les pôles s_k, k=1, …, N-1sur le plan complexe.

3- A partir de $H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$, montrer que $H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$.

4- Si on prend le cas du filtre de Chebyshev, calculer les paramètres de ce filtre.

Exercice#3 :

On veut réaliser un filtre passe-bas RIF à phase linéaire. On utilise la fenêtre rectangulaire.

Les paramètres de ce filtre sont : N=4 et ω_c=0.3 π.

1- Calculer la réponse impulsionnelle, $h(n)$.

2- Pour une séquence d'entrée, $x(n) = \{2,\ 4,\ 6,\ 4,\ 2\}$, calculer la séquence de sortie, $y(n)$.

3- Quel est l'inconvénient majeur du filtre RIF.

--- Bonne chance ---

Master 1 : INST & ESER

M'sila le 27/01/2020

Solution « Traitement avancé du signal »

Ex#1 :

1- Calcul de $Y(z)$:

Puisque $y(n) = x(n) * h(n)$

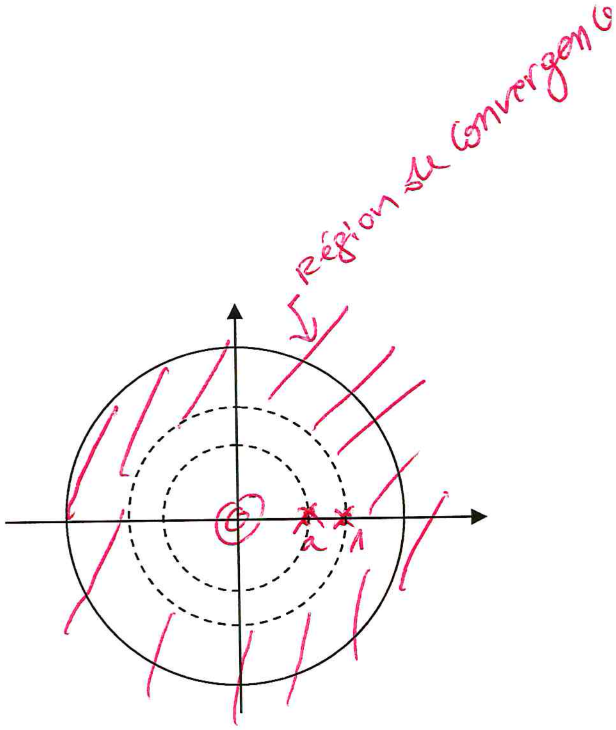
$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{avec } |z| > |a|$$

Finalement, on trouve

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \quad \text{avec } |z| > 1$$



2- Pôles, zéros et la région de convergence :

I y a deux pôles : $z_1 = a$ et $z_2 = 1$

et un zéro d'ordre 2 : $z = 0$

3- Calcul de $y(n)$:

$$y(n) = \sum Residus = \lim_{z\to 1} \frac{z^2 z^{n-1}}{z-a} + \lim_{z\to a} \frac{z^2 z^{n-1}}{z-1}, \quad n \geq 0$$

$$= \frac{1}{1-a} + \frac{a^{n+1}}{a-1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Ex#2 :

1- Calcul de N et Ω_c :

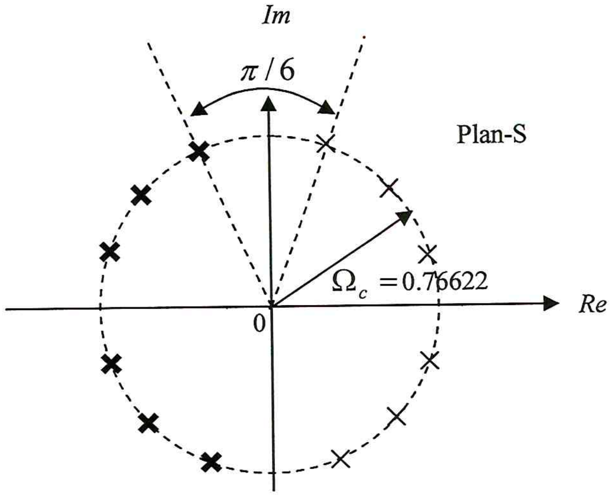
Nous avons

$$\begin{cases} 1 + \left(\dfrac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1} \\ 1 + \left(\dfrac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{1.5} \end{cases}$$

$$N = \frac{1}{2}\frac{log[(10^{1.5}-1)/(10^{0.1}-1)]}{log((0.3\pi)/(0.2\pi))} = 5.8858, \quad \text{on prend } N=6$$

$$\Omega_c = 0.3\pi(10^{0.1}-1)^{-1/2N} = 0.7032$$

2- Calcul de s_k, k=1, …, N-1 :



$$s_{k+1} = -\Omega_c \, sin\left(\frac{2k+1}{2N}\pi\right) + j\Omega_c \, cos\left(\frac{2k+1}{2N}\pi\right)$$

$$s_{1,2} = -\Omega_c \, sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \pm j\Omega_c \, cos\left(\frac{\pi}{12}\pi\right)$$

$$s_{3,4} = -\Omega_c \, sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) \pm j\Omega_c \, cos\left(\frac{3\pi}{12}\right)$$

$$s_{5,6} = -\Omega_c \, sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \pm j\Omega_c \, cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$s_{1,2}$= -0.6792 ± j0.1820

$s_{3,4}$= -0.4972 ± j0.4972

$S_{5,6}$= -0.1820 ± j0.6792

3- Démonstration de $H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-e^{s_k T} z^{-1}}$:

La transformée de Laplace inverse de $H_a(s)$ donne la réponse impulsionnelle analogique suivante, $h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(t)$

Pour t=nT, $h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT} u(nT)$

La TZ de $h_a(nT)$ donne $H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-e^{s_k T} z^{-1}}$

4- Calcul des paramètres du filtre de Chebyshev :

$$\begin{cases} 20\,log_{10}\left(\left|H_a(j\Omega)\right|\right) \geq -1 \\ 20\,log_{10}\left(\left|H_a(j\Omega)\right|\right) \leq -15 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \varepsilon^2 cos^2\left(N\,cos^{-1}(1)\right) = 10^{0.1} - 1 \\ \varepsilon^2 cosh^2\left(N\,cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)\right) = 10^{1.5} - 1 \end{cases}$$

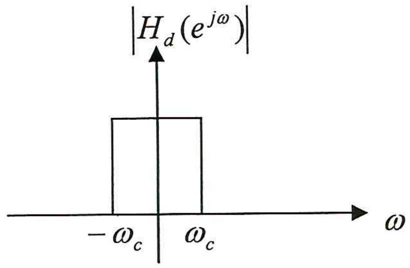
Pour $\Omega = \Omega_c = \Omega_p$, $\cos^2(N\cos^{-1}(1)) = \cos^2(N.0) = 1 \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{0.1} - 1 \Rightarrow \varepsilon = 0.508847$

$$cosh^2\left(N\,cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)\right) = \frac{10^{1.5}-1}{10^{0.1}-1} \Rightarrow cosh\left(N\,cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)\right) = \sqrt{\frac{10^{1.15}-1}{10^{0.1}-1}}$$

$$N \geq \frac{cosh^{-1}\left(\sqrt{(10^{1.5}-1)/(10^{0.1}-1)}\right)}{cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} = 3.19 \approx 4$$

$\Omega_c = 0.2\pi = 0.6283$

Ex #3 :



N=4 et ω_c=0.3 π .

1- Calcul de $h(n)$:

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega.=\frac{sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$

où $\alpha=(N-1)/2$=1.5

$h(n)=h_d(n)w(n)$, $0\leq n\leq N-1$

$$h(n)=\frac{sin[\omega_c(n-(N-1)/2)]}{\pi(n-(N-1)/2)},\quad n=0,\ \ldots,\ N\text{-}1$$

$h(n)=\{0.2096 \quad 0.2890 \quad 0.2890 \quad 0.2096\}$

2- Calcul de $y(n)$ pour $x(n)=\{2,\ 4,\ 6,\ 4,\ 2\}$:

$y(n)=h(0)x(n)+h(1)x(n-1)+h(2)x(n-2)+h(3)x(n-3)$

$y(0)=h(0)x(0)=0.4192$

$y(1)=h(0)x(1)+h(1)x(0)=1.4164$

$y(2)=h(0)x(2)+h(1)x(1)+h(2)x(0)=2.9916$

$y(3)=h(0)x(3)+h(1)x(2)+h(2)x(1)+h(3)x(0)=4.1476$

$y(4)=h(0)x(4)+h(1)x(3)+h(2)x(2)+h(3)x(1)=4.1476$

$y(5)=h(1)x(4)+h(2)x(3)+h(3)x(2)=2.9916$

$y(6)=h(2)x(4)+h(3)x(3)=1.4164$

$y(7)=h(3)x(4)=0.4192$

3- L'inconvénient majeur étant, pour une précision donnée, un nombre de coefficients élevé nécessitant un temps de calcul élevé donc une fréquence d'échantillonnage assez faible.