Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté de Technologie
Département D'électronique

Année universitaire : 2019/2020
Matière : SA&PS
1ere année Master STLC
Le 27-01-20 de 8h30 à 10h

EMD N° : 01 (Durée 01H.30)

Exercice1

1. Parmi les fonctions suivantes quelles sont celles qui sont des fonctions de répartition ? Justifiez vos réponses.

$$F_X(x) = e^{-x^2}\ ; \quad F_X(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}; \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 e^{-x}, & x \geq 0; \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

2. Parmi les fonctions suivantes quelles sont celles qui sont des densités de probabilité ? Justifiez.

$$f_X(x) = e^{-|x|}\ ; \quad f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}; \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}\ ; \quad f_X(x) = \begin{cases} \cos(x), & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & hors \end{cases}$$

Exercice2

On considère X une variable aléatoire de densité de probabilité :

$$g_X(x) = \begin{cases} c\ xe^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Déterminer 'c' pour que g soit une densité.
2. Calculer $G_X(x)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer la probabilité : $P_r\ (0 \leq X \leq \frac{1}{2})$.

Questions de cours : Répondre par vraie ou faux (sur cette feuille).

1. Un système est dit causal lorsque la sortie précède l'entrée.
2. La convolution est la relation liant la sortie d'un système à son entrée et à sa réponse impulsionnelle.
3. L'intercorrélation c'est la comparaison entre un signal et ces copies translatées.
4. La loi gaussienne possède expression suivante : $F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}}$
5. Un bruit coloré possède une DSP uniforme pour toutes les fréquences.
6. Un processus gaussien possède une loi multi-variables conjointement uniforme.
7. Un processus stochastique ergodique est Stationnaire au Sens Large.
8. Un processus stochastique est stationnaire si ces caractéristiques sont indépendantes de l'origine du temps.
9. La loi de Bernoulli est une loi binaire discrète.
10. Les variables aléatoires d' une séquence indépendante identiquement distribuée (iid) ont une même loi de probabilité.
11. Le périodogramme est l'estimation de la DSP à travers les fonctions de corrélation.
12. Un processus stochastique est considéré comme un signal à puissance moyenne finie.

Matière SA et P.S   Master 1 STLC   2019 - 2020

Corrigé type

Exercice N°1 /8

1) Une fonction est une CDF si elle est monotone croissante sur [0, 1] et que $F_{(-\infty)} \longrightarrow 0$ et $F_x(+\infty) \longrightarrow 1$

* $F_x(x) = e^{-x^2}$ $\quad F_x(-\infty) = 0$ (0,25) et $F_x(+\infty) = 0$ (0,25) ce n'est pas une CDF (0,5)

* $F_x(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\quad F_x(-\infty) = 0$ (0,25) $\quad F_x(+\infty) = \infty$ (0,25) ce n'est pas une CDF (0,5)

* $F_x(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{x^2}{2}) e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\quad F_{x(-\infty)} = 0$ (0,25) $\quad F_x(+\infty) = 1$ (0,25) c'est une CDF (0,5)

* $F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\quad F_x(-\infty) = 0$ (0,25) $\quad F_x(+\infty) = 1$ (0,25) c'est une CDF (0,5)

2°) Une fonction est une PDF si elle est positive et normalisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = 1$

* $f_x(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx$ (0,25) $= \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$ (0,25) $= 1$ (0,25) c'est une PDF (0,25)

* $f_x(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases}$ (0,25) $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^{+x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

$= e^{x}\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$ (0,25) $= (1-0) - (0-1) = 1 + 1 = 2$ (0,25)

ce n'est pas une pdf (0,25)

• $f_x(x) = \begin{cases} x/2 & 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{hors} \end{cases}$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\, dx = \int_0^2 x/2\, dx$ (0,25) $= \frac{1}{4}x^2\Big|_0^2$ (0,25) $= 1$ (0,25)

c'est une pdf ou bien c'est une loi uniforme (0,25)

• $f_x(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{hors} \end{cases}$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx =$ (0,25) $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2}$ (0,25) $= 1$ (0,25)

c'est une pdf (0,25)

Question de cours /6

1- F   2- V   3- F   4- F   5- V

6- F   7- F   8- V   9- V   10- F   11- V   12- V

Exercice n°2 (6) $g_X(x) = \begin{cases} c\, x e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

1) c? $g_X(x)$ est une densité $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g_X(x) = 1$ 0,25

$u \to x,\ u' \to 1$
$v' \to e^{-2x},\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_X(x) = c\int_0^{+\infty} x e^{-2x} = c\left[-\frac{x}{2}\cancel{e^{-2x}}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right]$$ 0,25

$$= c\left[-\frac{1}{4} e^{-2x}\right]_0^{+\infty} = \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4$$ 0,25 0,25

$$g_X(x) = \begin{cases} 4 x e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

2°) $G_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g_X(x)$ 0,25 $= \cancel{\int_{-\infty}^{0} g_X(x)dx} + \int_0^x g_X(x)dx$ 0,25

$\to 0$

$$\int_0^x g_X(x)dx = \int_0^x 4xe^{-2x}dx = 4\left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\Big|_0^x - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^x\right]$$ 0,5

déjà calculé

$$= 4\left[-\frac{x}{2}e^{-2x} - 0 - \frac{1}{4}(e^{-2x}+1)\right]$$ 0,5

$$= -2xe^{-2x} - e^{-2x} + 1$$
$$= 1 - e^{-2x}(2x+1)$$ 0,25

$$G_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}(2x+1) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$ 0,25

3°) $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x g_X(x)dx$ 0,5 $= \underbrace{4\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}dx}_{I}$ 0,25

$u \to x^2,\ u' \to 2x$
$v' \to e^{-2x} \to v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$I = 4\left[\cancel{-\frac{x^2}{2}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}} + \int x e^{-2x}dx\right] = 4\int_0^{+\infty} x e^{-2x}$$ déjà calculé 0,5

$$I = 1 - e^{-2x}(2x+1)\Big|_0^{+\infty} = (1-0) - (1-1) = 1 = E[X]$$ 0,5 0,25

4°) $P(0 \leq X \leq 1/2) = G_X(1/2) - G_X(0)$ 0,25

$G_X(1/2) = 1 - e^{-2\cdot 1/2}(2\cdot\frac{1}{2}+1) = 1 - e^{-1}(2) =$ 0,25

$G_X(0) = 1 - e^{-2(0)}(2(0)+1) = 1 - 1(0+1) = 0$ 0,25

$P(0 \leq X \leq 1/2) =$ 0,25