Université de M'sila – Faculté de Technologie - Département d'Electronique
Option : Microélectronique (M2) – Module : Physique des semi-conducteurs 3
Examen du 1ier semestre – Le 27/01/2020 – Durée : 1h :30 – Enseignante : R. CHABANE

## Exercice 1 (8 points)

Soit une particule de masse ***m*** et d'une énergie ***E*** en mouvement dans un potentiel V(x), tel que :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & si \quad x < 0 \\ -V_0 & si \quad 0 < x < a \\ 0 & si \quad x > a \end{cases}$$

Où ***V₀*** et ***a*** sont des constantes positives.

- On s'intéresse aux états liés d'énergie ***E***, telle que : $-V_0 < E < 0$.

1. Représenter graphiquement l'allure du potentiel ***V(x)***.
2. **a.** Ecrire l'équation de Schrödinger aux états stationnaires dans chaque région.

   **b.** Résoudre ces équations et établir les expressions de $\Psi(x)$.
3. Appliquer les conditions de continuités de la fonction d'onde $\Psi(x)$ aux points ***x=0*** et ***x=a*** et montrer que : $\Psi_{II}(x) = 2iA \sin(k_1 x)$

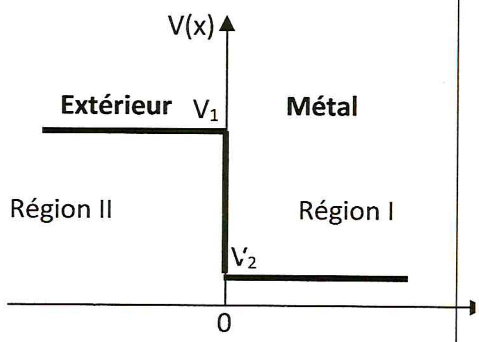
   $$\Psi_{III}(x) = 2iA \sin(k_1 x) e^{-k_2(x-a)}$$
4. Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule.

## Exercice 2 (12 points)

Soit un système de masse m et d'énergie E soumis au potentiel ***V(x)*** tel que :

$$V(x) = V_1 \text{ pour } x < 0, \text{ et } V(x) = V_2 \text{ pour } x > 0$$

Un tel système pourrait par exemple représenter l'interaction d'un électron libre et la structure atomique d'un métal situé en x > 0. Considérons que l'électron est libéré du métal et se déplace vers les ***x*** négatifs.




- **Cas : $E > V_1 > V_2$**

1. Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire dans chacune des régions (I) et (II).
2. Résoudre l'équation de Schrödinger et préciser la nature de chaque terme.
3. Ecrire les conditions de continuités de la fonction d'onde et de sa dérivée au point **x = 0**.
4. Définir le coefficient de transmission **T**, c'est-à-dire la probabilité pour que l'électron quitte le métal. Expliciter **T** en fonction de **$k_1$** et **$k_2$** où **$k_1$** et **$k_2$** sont les vecteurs d'ondes (à définir).
5. Même question pour R et vérifier que **T + R = 1**.
6. Ecrire **T** en fonction de **$V_1$**, **$V_2$** et **E** et faire application numérique avec :

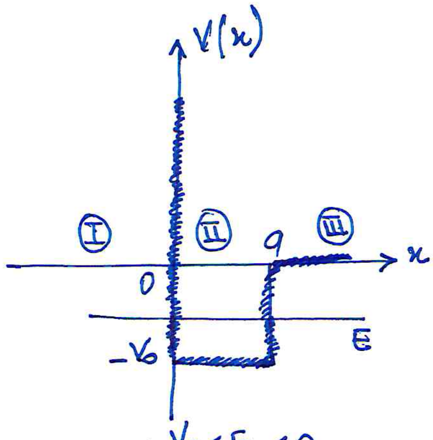
   E = 1 eV, $V_1$ = 0 eV et $V_2$ = -10 eV. Commenter.

CORRIGE TYPE.

## EX01:

1°/ Représentation graphique du potentiel $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x<0 \\ -V_0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$




$-V_0 < E < 0$.

On a 3 régions:

- région (I): $x<0$: $\psi_I(x) = 0$.
- région (II): $0 \leq x \leq a$.
- région (III): $x > a$.

2°/ Equation de Schrödinger des états stationnaires:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi(x) = 0.$$

- Dans la région (I), le potentiel est infini ($V(x) = \infty$) $\Rightarrow$ alors la probabilité de présence de la particule est nulle dans cette région $\Rightarrow$ par conséquent la fonction d'onde est nulle $\boxed{\psi_I(x) = 0.}$

- Dans la région (II), $V(x) = -V_0$, donc:

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)\psi_{II}(x) = 0, \qquad k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0).$$

- Dans la région (III), $V(x) = 0$, donc:

$$\frac{d^2\psi_{III}(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{III}(x) = 0, \qquad k_2^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}.$$

3°/ Expressions de $\psi(x)$ dans chaque région (Solution de l'équation de Schrödinger):

a. Solution de l'eq de Sch:

$$\begin{cases} \psi_I(x) = 0 & , x<0 \\ \psi_{II}(x) = A.e^{ik_1x} + B.e^{-ik_1x} & , 0 \leq x \leq a \\ \psi_{III}(x) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{C}\, e^{k_2x} + D.e^{-k_2x} & , x>a. \end{cases}$$

$0 \Leftarrow$ $\psi_{III}(x)$ doit tendre vers 0 qd $x \to +\infty$, car la fonction d'onde est bornée

(1)

• Finalement, On a :
$$\begin{cases} \psi_I(x) = 0 & , x < 0 \\ \psi_{II}(x) = A.e^{ik_1x} + B.e^{-ik_1x} & , 0 \leq x \leq a \\ \psi_{III}(x) = D.e^{-k_2x} & , x > a \end{cases}$$

b. Conditions de continuité aux points $x=0$, et $x=a$ :

• La continuité de la fonction d'onde au $x=0$ s'écrit :
$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) = 0. \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = -A.}$$

• Les équations de continuité au point $x=a$ :
$$\begin{cases} \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \\ \psi'_{II}(a) = \psi'_{III}(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A.e^{ik_1a} + B.e^{-ik_1a} = D.e^{-k_2a} \\ ik_1A.e^{ik_1a} - ik_1B.e^{-ik_1a} = -k_2D.e^{-k_2a} \end{cases}$$

En remplaçant $B=-A$, on trouve :
$$\begin{cases} 2iA\sin(k_1a) = D.e^{-k_2a} & \text{........ (1)} \\ 2iAk_1\cos(k_1a) = -k_2D.e^{-k_2a} & \text{...... (2)} \end{cases}$$

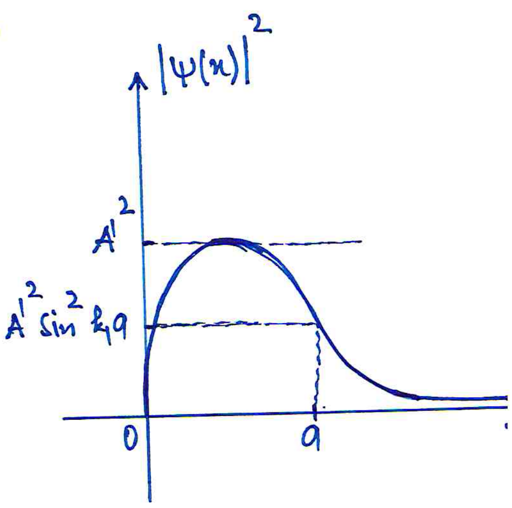
D'autre part :
$$\psi_{II}(x) = Ae^{ik_1x} + B.e^{-ik_1x} \quad (B=-A)$$
$$\boxed{\psi_{II}(x) = 2iA\sin(k_1x). = A'\sin(k_1x)}$$

$$(1) \iff D = 2iA\sin(k_1a)\,e^{k_2a}.$$

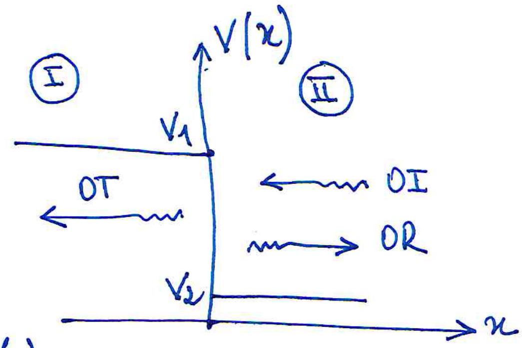
$$\Rightarrow \psi_{III}(x) = 2iA\sin(k_1a).e^{k_2a}.e^{-k_2x}$$
$$\boxed{\psi_{III}(x) = A'\sin(k_1a)\,e^{-k_2(x-a)}}$$

4°/ La densité de probabilité :

$$|\psi_{II}(x)|^2 = A'^2$$
$$|\psi_{III}(x)|^2 = A'^2\sin^2(k_1a)$$



- **Corrigé EXO 2 :**




Cas : $E > V_1 > V_2$

1°/ L'eq de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi(x) = 0. \leftarrow \text{Eq de Sch. ind. du T.}$$

a. Régim (II) :

$$\psi_{II}''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2)\psi_{II}(x) = 0.$$

On pose : $k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2)$.

$$\psi_{II}''(x) + k_2^2\psi_{II}(x) = 0.$$

Solution

$$\boxed{\psi_{II}(x) = \underbrace{A.e^{-ik_2x}}_{\substack{\text{Onde}\\ \text{Incidente}\\ \text{OI}}} + \underbrace{Be^{ik_2x}}_{\substack{\text{Onde}\\ \text{Réfléchie}\\ \text{OR.}}}}$$

b. Régim (I) :

$$\psi_I''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_1)\psi_I(x) = 0.$$

On pose : $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_1)$

$$\psi_I''(x) + k_1^2\psi_I(x) = 0.$$

Solution

$$\psi_I(x) = \underbrace{C.e^{-ik_1x}}_{\substack{\text{Onde}\\ \text{Transmise}\\ \text{OT}}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{D}}.e^{ik_1x}$$

$$\boxed{\psi_I(x) = C.e^{-ik_1x}}$$

Solutions :

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= A.e^{-ik_2x} + B.e^{ik_2x} \\ \psi_I(x) &= C.e^{-ik_1x} \end{aligned}}$$

## 2°/ Les Conditions de Continuité au point $x=0$ :

$$\begin{cases} \psi_I(x) = C.e^{-ik_1 x} \\ \psi_{II}(x) = A.e^{-ik_2 x} + B.e^{ik_2 x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) \\ \psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} C = A + B \ldots\ldots \\ -ik_1 C = ik_2 (B - A) \end{cases}}$$

## 3°/ Le Coefficient de transmission T :

Onde incidente : $A.e^{-ik_2 x}$

Onde réfléchie : $B.e^{ik_2 x}$

Onde transmise : $C.e^{-ik_1 x}$

- $T = \dfrac{|\psi_t|^2}{|\psi_i|^2} \cdot \dfrac{V_{g_t}}{V_{g_i}} = \dfrac{C^2}{A^2} \cdot \dfrac{\frac{\hbar.k_1}{m}}{\frac{\hbar.k_2}{m}} = \left(\dfrac{C}{A}\right)^2 \cdot \dfrac{k_1}{k_2}$.

* A partir des équations précédentes, on a :

$$\begin{cases} C = A + B \ldots\ldots (1) \\ \dfrac{k_1}{k_2} C = A - B \ldots\ldots (2) \end{cases} \qquad (1)+(2) \Rightarrow \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) C = 2A$$

$$\Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{2}{1 + \frac{k_1}{k_2}} \Rightarrow \boxed{\frac{C}{A} = \frac{2k_2}{k_2 + k_1}.}$$

donc T :

$$T = \frac{4 k_2^{\cancel{2}} k_1}{(k_2 + k_1)^2 \cancel{k_2}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{4 k_2 k_1}{(k_2 + k_1)^2}}.$$

- Le Coefficient de réflexion :

$$R = \frac{|\psi_r|^2}{|\psi_i|^2} \cdot \frac{V_{g_r}}{V_{g_i}} = \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{\frac{\hbar \cancel{k_2}}{m}}{\frac{\hbar \cancel{k_2}}{m}} = \left(\frac{B}{A}\right)^2.$$

On a :

$$\begin{cases} C = A + B. \\ \dfrac{C}{A} = \dfrac{2k_2}{k_2 + k_1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} B = C - A \\ \dfrac{B}{A} = \dfrac{C}{A} - 1 \Rightarrow \dfrac{B}{A} = \dfrac{2k_2}{k_2 + k_1} - 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{B}{A} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}}$$

Donc : $\boxed{R = \left(\dfrac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}\right)^2}$

• On Verifie que $T + R = 1$ :

$$\frac{4 k_2 k_1}{(k_2 + k_1)^2} + \frac{k_2^2 - 2 k_2 k_1 + k_1^2}{(k_2 + k_1)^2}$$

$$= \frac{k_2^2 + 2 k_2 k_1 + k_1^2}{(k_2 + k_1)^2} = \frac{(k_2 + k_1)^2}{(k_2 + k_1)^2} = 1.$$

4°/

$$T = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

sachant que : $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_1)$

$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2).$

$$T = \frac{4 \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{(E - V_1)(E - V_2)}}{\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_1)} + \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2)}\right)^2}$$

$$T = \frac{4 \cdot \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{(E - V_1)(E - V_2)}}{\left[\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\sqrt{E - V_1} + \sqrt{E - V_2}\right)\right]^2} = \frac{4 \sqrt{(E - V_1)(E - V_2)}}{\left(\sqrt{E - V_1} + \sqrt{E - V_2}\right)^2}$$

• Application numérique :

$E = 1\,eV.$

$V_1 = 0\,eV$ $\implies T = 0{,}71$

$V_2 = -10\,eV$ $T = 71\%.$

* 71% l'électron quitte le métal.

* 29% " sera réfléchi

R. CHABANE.