Université de Mohamed Boudiaf M'Sila **Année:** 2019 – 2020
Faculté des Science et Technologies **Le** 18 – 01 – 2020
Module: MATH 03 **Durée:** $1^h30^{\min}$
Spécialités: Génie mécanique, Génie électrique et Hydraulique.

Epreuve du 3^{eme} semestre

Exercice 01: (5pts=01+01+01+01+01**)**

1. Etudier la nature des séries suivantes:

$$A)\ \sum_{n\geq 0}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2} \quad B)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^7} \quad C)\ \sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

2. Pour chacune des affirmations suivantes: montrer qu'elle est *fausse* en donnant un contre-exemple:

- Si $\sum(u_n+v_n)$ converge alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
- Si $\sum u_n$ converge alors elle converge absolument.

Exercice 02: (7pts=01.5+03.5+01+01**)**
Soit f la fonction de période 2π définie par:

$$f(t) = t^2 + t, \quad \text{si } t \in [0, 2\pi[$$

1. Construire le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 4\pi]$.
2. Déterminer le développement de f en série de Fourier.
3. En déduire la somme de la série de Riemann alternée de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
4. Calculer de même; la somme de série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 03: (8pts=01+01+01.5+02.5+02**)**

1. Trouver l'image par transformation de Laplace de:

$$A)\ f(t) = 2t + e^{3t}\cos(3t) + \sin(t)\cos(2t) \quad B)\ g(t) = (1+4\cos(3t))^2.$$

2. $A)$ Trouver la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2s-2}{s^2-s-2}$.

   $B)$ Trouver la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}$.

   $C)$ Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} u''(t) - u'(t) - 2u(t) = te^t, \\ u(0) = 2, \quad u'(0) = 0. \end{cases}$$

Université de Mohamed Boudiaf M'Sila **Année:** 2019 – 2020
Faculté des Science et Technologies **Le** 18 – 01 – 2020
Module: Math 03 **Durée:** $1^h 30^{\text{min}}$
Spécialités: Génie mécanique, Génie électrique et Hydraulique.

Corrigé type d'epreuve du 3^{eme} semestre

Exercice 01: (5pts=01+01+01+01+01)

1. $A)\ \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = e > 1$, La série de terme général u_n diverge.

   $B)\ \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^7} \sim \frac{2^4}{7^3} \times \frac{1}{n^{10}}$, Il s'agit du terme général d'une série de Riemann *convergente* avec $\alpha = 10 > 1$.

   $C)\ (-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = (-1)^n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

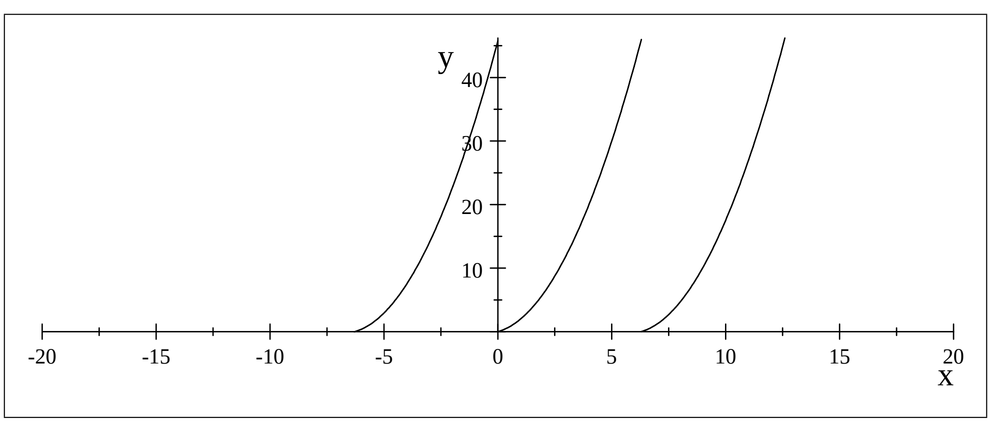
   $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ est positif, décroissant et tend vers 0, d'après le critère de Leibniz la série converge.

2. $A)$ Prendre $u_n = n + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = -n$ Pour $n \geq 1$.

   La série $\sum (u_n + v_n)$ converge mais les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent; car: les termes généraux ne tendent pas vers 0.

   $B)$ On a vu dans le cours que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument: $\sum \frac{1}{n}$.

Exercice 02: (7pts=01.5+03.5+01+01)

1. 

2. $T=2\pi \Longrightarrow L=\pi$ et $\alpha=0$. Alors

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t+t^2 dt = \frac{8\pi^2}{3}+2\pi. \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(t+t^2\right)\cos(nt)\,dt = \frac{4}{n^2}. \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(t+t^2\right)\sin(nt)\,dt = -\frac{4\pi+2}{n}.
\end{aligned}$$

Donc

$$S_n(t) = \frac{4\pi^2}{3}+\pi+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nt - \frac{4\pi+2}{n}\sin nt\right).$$

3. La fonction S_n prend la meme valeur que f en tout point ou cette dernière fonction est continue. En particulier

$$\begin{aligned}
S_n(\pi) &= \frac{4\pi^2}{3}+\pi+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}\cos n\pi \\
&= f(\pi) = \pi+\pi^2,
\end{aligned}$$

d'ou

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4. Remplacons cette fois t par 0. Comme f n'est pas continue en ce point,

$$S_n(0) = \frac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = 2\pi^2+\pi.$$

D'autre part,

$$S_n(0) = \frac{4\pi^2}{3}+\pi+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2},$$

Finalement,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 03: (**8pts**=01+01+01.5+02.5+02)

1. Trouver l'image par transformation de Laplace de:

$$\begin{aligned}
&A)\ f(t) = 2t + e^{3t}\cos(3t) + \sin(t)\cos(2t) \\
&\qquad = 2t + e^{3t}\cos(3t) + \frac{1}{2}(\sin 3t - \sin t) \\
&\Rightarrow F(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{s-3}{(s-3)^2+9} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{s^2+9} - \frac{1}{s^2+1}\right) \\
&B)\ g(t) = (1+4\cos(3t))^2 \\
&\qquad = 9 + 8\cos 3t + 8\cos 6t, \\
&\Rightarrow G(s) = \frac{9}{s} + \frac{8s}{s^2+9} + \frac{8s}{s^2+36}.
\end{aligned}$$

2. $A)$ Trouver la décomposition en éléments simples de $\frac{2s-2}{s^2-s-2}$. (admet deux poles réels $-1, 2$). On pose

$$\begin{aligned}
\frac{2s-2}{s^2-s-2} &= \frac{2s-2}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} \\
2s-2 &= A(s-2) + B(s+1),
\end{aligned}$$

- $s = -1 \Longrightarrow A = \frac{4}{3}$,
- $s = 2 \Longrightarrow B = \frac{2}{3}$,

Alors

$$\frac{2s-2}{s^2-s-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{s+1} + \frac{2}{s-2}\right).$$

$B)$ Trouver la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}$. (admet trois poles réels $-1, 2$ et 1). On pose

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} \\
1 &= A(s-2)(s-1)^2 + B(s+1)(s-1)^2 + C(s+1)(s-2)(s-1) \\
&\quad + D(s+1)(s-2),
\end{aligned}$$

- $s = -1 \Longrightarrow A = \frac{-1}{12}$,
- $s = 2 \Longrightarrow B = \frac{1}{3}$,
- $s = 1 \Longrightarrow D = \frac{-1}{2}$,

Ce qui détermine trois constantes, pour obtenir, on compare les termes en s^3

$$\begin{aligned}
1 &= A + B + C \\
&\Longrightarrow C = \frac{-1}{4}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{\left(s^2-s-2\right)\left(s-1\right)^2}=\frac{-1}{12}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{4}{s-2}\right)+\frac{-1}{4}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{2}{\left(s-1\right)^2}\right).$$

C) Par la transformation de Laplace, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(u''\left(t\right)-u'\left(t\right)-2u\left(t\right)\right) &= \mathcal{L}\left(te^t\right),\\ \left(s^2-s-2\right)\mathcal{L}\left(u\left(t\right)\right) &= \frac{1}{\left(s-1\right)^2}+2s-2,\\ \mathcal{L}\left(u\left(t\right)\right) &= \frac{1}{\left(s^2-s-2\right)\left(s-1\right)^2}+\frac{2s-2}{\left(s^2-s-2\right)},\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$\mathcal{L}\left(u\left(t\right)\right)=\frac{5}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(s-1\right)^2},$$

par la transformation inverse de Laplace, on peut alors conclure que la solution est:

$$u\left(t\right)=\frac{5}{4}e^{-t}+e^{2t}-\frac{2t+1}{4}e^t.$$