Université De Msila Année Universitaire: 2019-2020.

Module: Maths 3.

Exercice1: $(2+2+2=6$ points) La nature des séries suivantes:

a) $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n+1)^4}$ série alternnée dont $a_n=\frac{1}{(n+1)^4}$, on peut vérifier que la suite

$$\begin{cases} a_n \text{ est décroissante} \\ \text{et } \lim_{n\infty} a_n = 0 \end{cases}$$

donc theorème de Liebnitz nous permit de conclure que la série en question est convergente.

b) pour la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, on pose $u_n=\frac{1}{n\sqrt{n+1}}\underset{n\infty}{\simeq} v_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est le terme général d'une série de Riemann dont $\left(\alpha=\frac{3}{2}>1\right)$donc converge, alors d'aprés le théorème d'équivalence on déduit que notre série est une série convergente..

c) $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{n!\sqrt{n+1}}$, Si on pose $u_n=\frac{2^n}{n!\sqrt{n+1}}$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}}\underset{n\infty}{\longrightarrow}$ $0<1$.alors d'aprés D'Alembert la série $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{n!\sqrt{n+1}}$ coverge.

Exercice2: (2pts+1pt+2pts+2pts+1pt=7pts)

Soit f une fonction periodique de periode $T=3$, donnée par$f(t)=\begin{cases} t & \text{si } t\in[-1,1] \\ 0 & \text{si } t\in[1,2] \end{cases}$ a) On note par $S(t)$ la somme de Fourier associée à f., par définition $S(t)=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

alors $S(t)=\begin{cases} t & \text{si } t\in\,]-1;1[\\ 0 & \text{si } t\in\,]1,2[\\ \frac{0+1}{2} & \text{si } t=1 \\ \frac{-1+0}{2} & \text{si } t=-1 \text{ ou } t=2 \end{cases}$ (2pts)

b) La série de Fourier associée à f.il s'agit de calculer ses coeffiçients de Fourier

$$a_0=\frac{2}{3}\int_{-1}^{2}f(t)dt=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}tdt=0 \qquad (1\text{pt})$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_{-1}^{2}f(t)\cos\frac{2n\pi t}{3}dt=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}t\cos\frac{2n\pi t}{3}dt=0 \qquad (2\text{pts}).$$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_{-1}^{2} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{3}dt =$$

$$\frac{2}{3}\int_{-1}^{1} t\sin\frac{2n\pi t}{3}dt = \frac{4}{3}\int_{0}^{1} t\sin\frac{2n\pi t}{3}dt = \frac{-2}{n\pi}\int_{0}^{1} td\cos\frac{2n\pi t}{3}$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[\cos\frac{2n\pi}{3} - \int_{0}^{1}\cos\frac{2n\pi t}{3}dt\right] = \frac{-2}{n\pi}\left[\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}\right].$$

donc

$$b_n = \frac{-2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3} \qquad \text{(2pts)}.$$

donc la série de Fourier est

$$S(t) = \sum_{n\geq 1}\left[\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\right]\sin\frac{2n\pi t}{3} \qquad \text{(1pt)}.$$

Exercice 3: (1+2+3+3=9pts)
En utilisant la transformée de Laplace
a) Trouver l'image de :
1)

$$f(t) = t^2 \overset{cours}{\longleftrightarrow} F(s) = \frac{2}{s^3} \qquad (1pt)$$

.2) $g(t) = e^{-t}\cos t$ comme $\cos t \overset{cours}{\longleftrightarrow} \dfrac{s}{s^2+1}$ alors

$$g(t) = e^{-t}\cos t \overset{cours}{\longleftrightarrow} G(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1},.$$

3) $h(t) = te^t\sin t$.comme $\sin t \overset{cours}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s^2+1}$ et $e^t\sin t \overset{cours}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{(s-1)^2+1}$ alors

$$h(t) = te^t\sin t \overset{cours}{\longleftrightarrow} H(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right) = \frac{2(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}.$$

b) Alors l'image de

$$k(t) = t^2 + e^{-t}\cos t + te^t\sin t. \overset{cours}{\longleftrightarrow} K(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{2(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}$$

2) Trouver l'origine de

$a)$

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2-2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{s-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{s+\sqrt{2}}\overset{cours}{\longleftrightarrow}\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}+\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}. \qquad (1pt)$$

b) $G(s)=\dfrac{s}{(s-2)^3}=\dfrac{1}{(s-2)^2}+\dfrac{2}{(s-2)^3}\overset{cours}{\longleftrightarrow}$comme $e^{2t}\overset{cours}{\longleftrightarrow}\dfrac{1}{s-2}$ alors

$te^{2t}\longleftrightarrow-\left(\dfrac{1}{s-2}\right)'=\dfrac{1}{(s-2)^2}$ de plus $\dfrac{2}{(s-2)^3}=-\left(\dfrac{1}{(s-2)^2}\right)'\overset{cours}{\longleftrightarrow}t^2e^{2t}$

alors

$$G(s)=\frac{s}{(s-2)^3}\longleftrightarrow\left(t+t^2\right)e^{2t} \qquad (1pt)$$

c) $K(s)=\dfrac{s}{s^2+s+2}=\dfrac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}.comme$

$$\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\overset{cours}{\longleftrightarrow}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

$$\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\overset{cours}{\longleftrightarrow}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

alors

$$K(s)=\frac{s}{s^2+s+2}\overset{cours}{\longleftrightarrow}=e^{-\frac{t}{2}}\left[\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right] \qquad (2\text{pts})$$

Resp de Module: A. Memou.