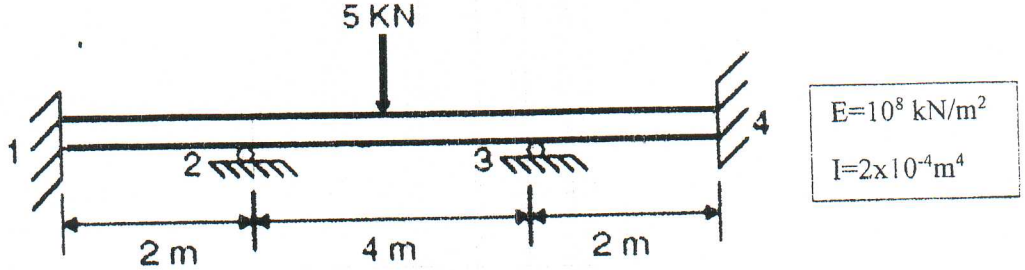
Nom et prénom : Corrigé

Pour la poutre de la figure jointe :



1. ***Déterminer les charges nodales équivalentes à la charge concentrée pour un élément barre de flexion (élément poutre), déduire alors le chargement nodal équivalent du problème.***

Pour une charge concentrée, les charges équivalent sont : $q^e = [N]^T_{x_i} \cdot (P)$

2

ici P est dirigée dans le sens contraire de l'axe z

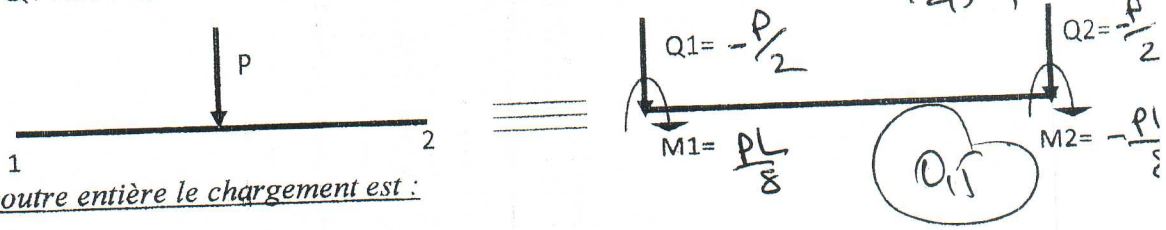
$\Rightarrow q^e = [N]^T_{x_i} \cdot (-P)$

Pour 1 élément poutre :

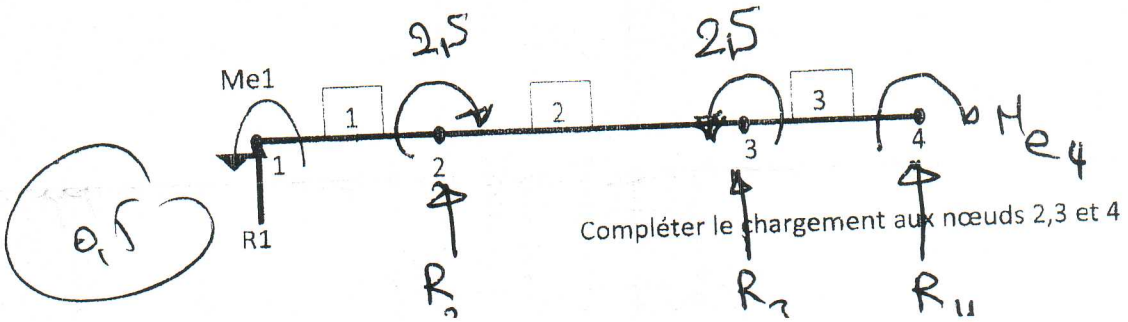
$$q^e = \left[1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3} \quad -x+\frac{2x^2}{L}-\frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2}-\frac{2x^3}{L^3} \quad \frac{x^2}{L}-\frac{x^3}{L^2}\right]^T_{x=\frac{L}{2}} \times (-P)$$

$$\{q^e\} = \left[-\frac{P}{2} \quad \frac{PL}{8} \quad -\frac{P}{2} \quad -\frac{PL}{8}\right]^T$$

Pour la travée intermédiaire de la poutre $q^e = \begin{Bmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ -2{,}5 \\ 2{,}5 \end{Bmatrix}$



Donc pour la poutre entière le chargement est :



2. ***Ecrire les matrices de rigidité pour chacune des trois travées. Puis Introduire les conditions lim au niveau de chaque élément pour former les matrices de rigidité réduites.***

Matrices de rigidité des différentes travées (éléments) $E = 10^8\ KN/m^2$, $I = 2\times10^{-4}\ m^4$

element 1 : L = 2m

1

$$K_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 30 & -30 & -30 & -30 \\ -30 & 40 & 30 & 20 \\ -30 & 30 & 30 & 30 \\ -30 & 20 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

element 2 : L = 4m

1

$$K_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 3{,}75 & -7{,}5 & -3{,}75 & -7{,}5 \\ -7{,}5 & 20 & 7{,}5 & 10 \\ -3{,}75 & 7{,}5 & 3{,}75 & 7{,}5 \\ -7{,}5 & 10 & 7{,}5 & 20 \end{bmatrix}$$

Element 3 L = 2m

1

$$K_3 = 10^3 \begin{bmatrix} 30 & -30 & -30 & -30 \\ -30 & 40 & 30 & 20 \\ -30 & 30 & 30 & 30 \\ -30 & 20 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

Conditions aux limites :

$w_1 = \theta_1 = 0$ $w_2 = 0$

$w_3 = 0$ $w_4 = \theta_4 = 0$

2

Les matrices réduites sont donc : element 1 : degré de liberté restant θ_2

element 2 (θ_2, θ_3) element 3 (θ_3)

$$k_1^* = \begin{bmatrix} 40000 \end{bmatrix}, \quad k_2^* = \begin{bmatrix} 20000 & 10000 \\ 10000 & 20000 \end{bmatrix}, \quad k_3^* = \begin{bmatrix} 40000 \end{bmatrix}$$

2

Nom et prénom : . . . . . .

3. ***Construire la matrice globale réduite de la poutre entière et résoudre ainsi le système global réduit pour déterminer les rotations aux nœuds de la travée intermédiaire***

Assemblage :

$K^* =$

	θ_2	θ_3
M_2	40000 + 20000	10000
M_3	10000	40000 + 20000

2

Le système global réduit $F^* = K^*U^*$ est donc :

$$\begin{Bmatrix} 2,5 \\ -2,5 \end{Bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

1,5

La résolution donne :

$\theta_2 = 0,5 \times 10^{-4}$ rd , $\theta_3 = -0,5 \times 10^{-4}$ rd

1

4. ***Déterminer les efforts internes (M, T) aux nœuds de chaque travée***

Travée 1 (Elément 1) :

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 30000 & -30000 & -30000 & -30000 \\ -30000 & 40000 & 30000 & 20000 \\ -30000 & 30000 & 30000 & 30000 \\ -30000 & 20000 & 30000 & 40000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

1,5

Travée 2 (Elément 2) :

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3750 & -7500 & -3750 & -7500 \\ -7500 & 20000 & 7500 & 10000 \\ -3750 & 7500 & 3750 & 7500 \\ -7500 & 10000 & 7500 & 20000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}5\times10^{-4} \\ 0 \\ -0{,}5\times10^{-4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ -2{,}5 \\ -2{,}5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2{,}5 \\ -2 \\ -2{,}5 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

1,5

Travée 3 (Elément 3) :

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 30000 & -30000 & -30000 & -30000 \\ -30000 & 40000 & 30000 & 20000 \\ -30000 & 30000 & 30000 & 30000 \\ -30000 & 20000 & 30000 & 40000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}5\times10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

1,5

5. ***Déduire la flèche à mi travée de la poutre***

~~Dus~~ pour les charges nodales equivalente

$$f_{(\frac{L}{2})} = w(\tfrac{L}{2}) = [N]_{x=\frac{L}{2}} \times \lfloor 0 \quad 0{,}5\times10^{-4} \quad 0 \quad -0{,}5\times10^{-4} \rfloor^T$$

$$= -0{,}5\times10^{-4}\ m$$

1

pour la fleche réele

$f_r = f(\frac{L}{2}) - f$ du à la charge à mi travée