Université Mohamed Boudiaf — 21 .01. 2020

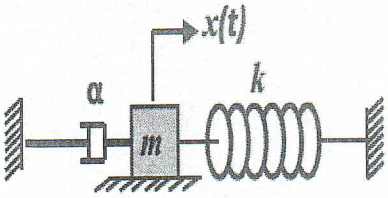
Faculté de Technologie — 2eme année LMD

Département Hydraulique — Temps alloué : 1h30

Examen Physique 3 (Ondes & Vibrations)

Exercice 1 : (07 points)

Supposant que le système (figure ci-contre) effectue des oscillations de faibles amplitudes.

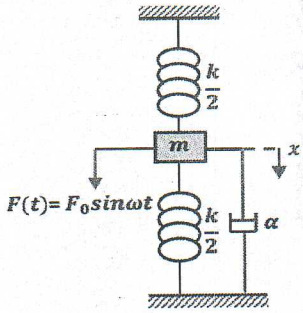


1. Quelle est le nombre de degrés de liberté ?
2. Calculer le Lagrangien du système.
3. Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de δ et ω_0 et déduire ω_a.
4. Pour $\delta < \omega_0$, Trouver la solution de l'équation différentielle du mouvement aux conditions initiales : $x(0) = x0$, $\dot{x}(0) = 0$

Exercice 2 : (08 points)

Soit un système oscillant constitué d'une masse m attachée à 2 ressorts de constante de raideur $k/2$ chacun et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux. On applique à la masse m une force

$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$. (Figure ci-contre)



1. Quelle est le nombre de degrés de liberté et trouver le système équivalent
2. Trouver l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.
3. Ecrire la solution générale de l'équation différentielle.
4. Donner la solution homogène $x_H(t)$ et tracer sa courbe pour $\delta < \omega 0$
5. Calculer pour la solution particulière $x_p(t)$, l'amplitude A et la phase φ.

Exercice 3 : Questions de cours (05 points)

a) Citer les différents types de couplage dans les systèmes mécaniques et quels sont leurs équivalents dans les systèmes électriques

b) Expliquer le phénomène de battement ? Donner l'expression de la pulsation de battement et la période correspondante

c) Donnez la bonne réponse : 1-Le décrément logarithmique est calculé dans le cas d'un système : fortement amorti, faiblement amorti ou critique ?
2- Pour un amortissement critique, le système oscillant revient à l'équilibre lentement, rapidement ou jamais ?
3- Pour un système amorti, l'amplitude à la résonance, est infinie, maximale ou nulle ?

BONNE CHANCE

Exercice 01 (07 points)

① Le nombre de degré de liberté "ddl" = nbre de Coord. − nbre de Relations reliant les Coord.
$= 1$ (0,5)

② Le Lagrangien du système
$L = T - U$

. Energie cinétique : $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ (0,5)

. " Potentielle : $U = \frac{1}{2} k x^2$ (0,5)

. Le Lagrangien : $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$ (0,5)

. La fonction de dissipation :
$D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$ (0,5)

③ L'equation differentielle du M^vt :
L'equation de Lagrange dans le cas d'un système libre amorti :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \quad (0,5)$$

avec
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x} \quad (0,5)$$

L'equation differentielle s'ecrit :
$$m\ddot{x} + kx + \alpha\dot{x} = 0 \Rightarrow$$
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

elsque : $2\delta = \frac{\alpha}{m}$ (0,25)

et $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} =$

$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$ (0,5)

④ Solution de l'equ differentielle du M^vt pour $\delta < \omega_0$

(0,5) $x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t$

. On applique les conditions initiales pr calculer C et φ :

$x(0) = C \sin\varphi = x_0 =$

$C = \frac{x_0}{\sin\varphi}$ (0,5)

$x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi$

$\dot{x}(t) = -C\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_a t$
$+ C\omega_a e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi$ (0,5)

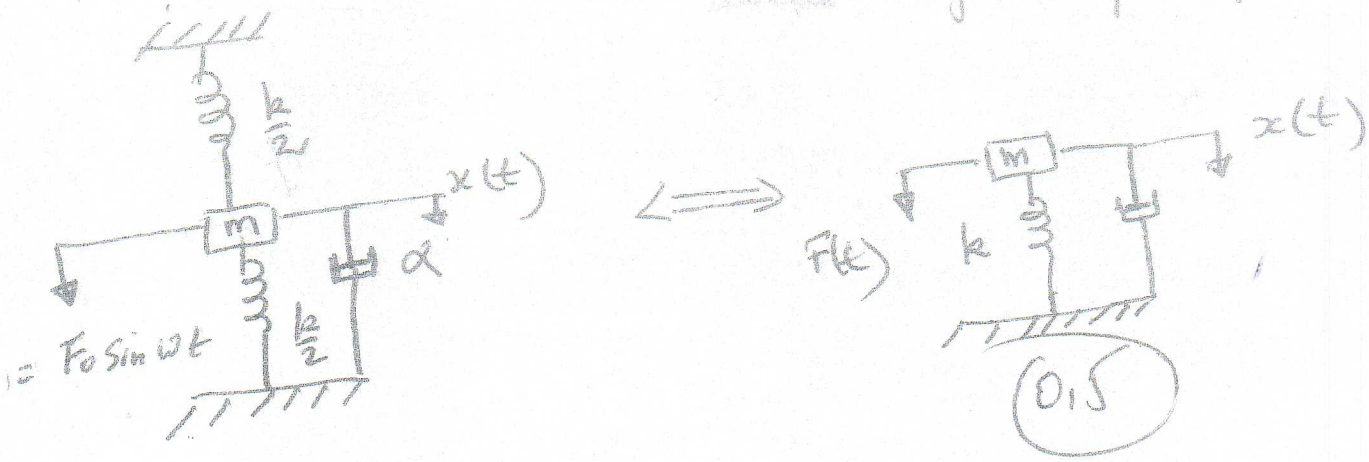
$\dot{x}(0) = -C\delta \sin\varphi + C\omega_a$
$= 0 \Rightarrow tg\varphi = \frac{\omega_a}{\delta}$

d'où :
$x(t) = \frac{x_0}{\sin\varphi} e^{+\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$ (0,5)

Exercice 02 : (08 p

Le système equivalen

système équivalent :



(0,5)

L'equation differentielle du MVL :

L'energie cinetique : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ (0,5)

" potentielle : $U = \frac{1}{2} k x^2$ (0,5)

La fonction de dissipation $D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$ (0,5)

Le Lagrangien : $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

l'equation de Lagrange (Système libre Amorti Forcé)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} & (0,5) \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx & (0,25) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = -\alpha \dot{x} & (0,25) \end{cases}$$

En remplaçant dans l'equat de Lagrange on trouve

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x} + F_0 \sin \omega t$$

on divise / m : on aura : $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

$$\Longrightarrow \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x - \frac{F_0}{m} \sin \omega t = B \sin \omega t \quad (0,5)$$

Solution totale de l'equation du MVL est :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (0,5)$$

solution de l'equation sans second membre c.a.d

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ (0,5)

$$\Longrightarrow x_h(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \phi)$$ avec

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$ (0,5)

* Solution particulière $x_p(t)$: solution de l'equation avec second membre c.a.d :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B \sin\omega t$$ (0,5)

<u>Calcul de l'amplitude A</u> : (en utilisant les nbrs complexes)

$y_p(t)$: vérifie l'equation avec second membre :

$$\ddot{y}_p + 2\delta\dot{y}_p + \omega_0^2 y_p = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} = B e^{j\omega t} \quad (*)$$

$$y_p(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} \Longrightarrow \dot{y}_p(t) = A j\omega e^{j(\omega t + \varphi)} = y_p(t) \cdot j\omega$$

$$\ddot{y}_p(t) = A j^2 \omega^2 e^{j(\omega t + \varphi)} = -\omega^2 y_p(t)$$

On remplace dans (*) et on trouve :

$$-\omega^2 y_p(t) + 2\delta j\omega\, y_p(t) + \omega_0^2 y_p(t) = B e^{j\omega t} \Longrightarrow$$

(0,5) $$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j\right] y_p(t) = \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j\right] = B e^{j\omega t}$$

$$\Longrightarrow \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j\right] A e^{j\varphi} = B$$ on divise sur "$e^{j\varphi}$"

on trouve : $$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j\right] A = B e^{-j\varphi} \quad (1)$$

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\delta\omega j\right] A = B e^{j\varphi} \quad (2)$$

Le longigué de cette equation est :

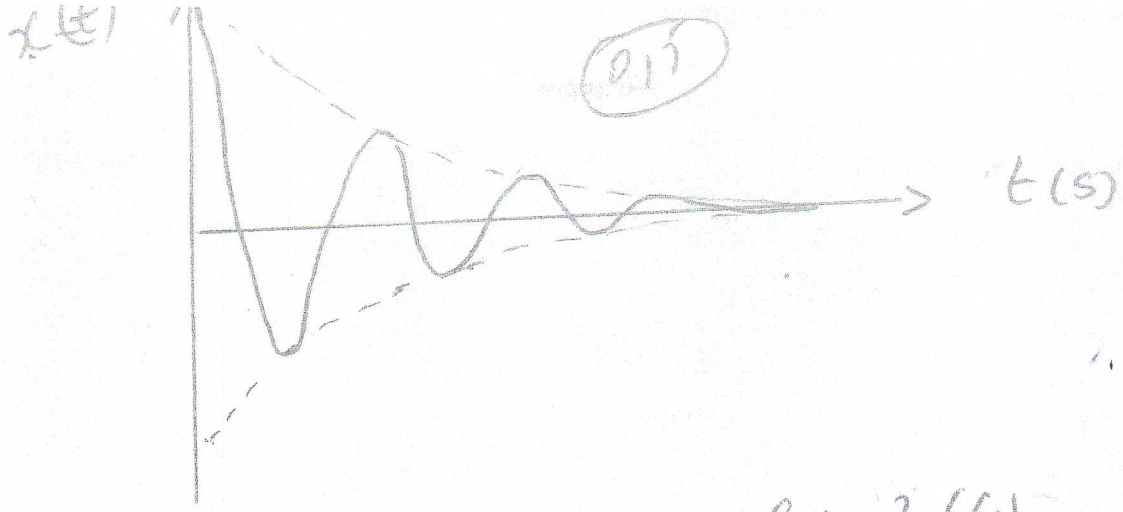
$$(1) \times (2) \Longrightarrow A^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2\right] = B^2$$

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$ (0,5)

<u>Calcul de la phase φ</u> :

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j\right] A = \begin{cases} B e^{-j\varphi} \\ B(\cos\varphi - j\sin\varphi) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

(0,5) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \Longrightarrow \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$



(0,5)

Variation de $x(t)$ en fct de t.

) $x(t) = \dfrac{B}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}} \sin\left[\omega t + \operatorname{Arctg} \dfrac{-2\omega\delta}{(\omega_0^2-\omega^2)}\right]$

<u>ercice 03</u> : (Questions de cours) : (5 pts)

les 03 types de couplage : dans les systèmes mécaniques entre
élastique, visqueux, et inertiel, leurs équivalents
nt : capacité, inductance et par résistance (1,5)

Phénomène de battement : lorsque le couplage est
faible : $\omega_2 \simeq \omega_1 \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ est faible (1,5)
et $\omega_B = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ et $T_B = 2\pi/\omega_2 - \omega_1$.

on calcul D dans le cas d'1 système faiblement amorti (0,5)
la pulsation pour un système amorti est ω_a - (0,5)

Pour un système oscillant avec amortissement critique
il revient à l'état d'équilibre rapidement (0,5)

Pour un système non amorti, l'amplitude à (0,5)
la résonance est infinie