



Examen final

Exercice01(10 pts)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x) - 2x + 1$

Nom :
Prénom :
Groupe :

- 1) Montrer que cette équation possède une solution dans l'intervalle $[0, 1]$

.....
.....
.....
.....
.....

- 2) Est-ce que cette solution est unique ?

.....
.....
.....
.....

- 3) Calculer une approximation de cette solution en utilisant la méthode de **Dichotomie (bissection)** avec une précision de 10^{-2} (04 itérations ,03 chiffre après le virgule)

أقل الصفة

Corrigé type Examen

Exercice01(10 pts)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x) - 2x + 1$

1) Montrer que cette équation possède une solution dans l'intervalle $[0,1]$

La fonction f est un polynôme, alors f est continue sur \mathbb{R} et donc sur $[0,1]$

$$f(0) = 1; f(1) = -0.158; f(0) \times f(1) < 0$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

$$\exists c \in [0,1]; f(c) = 0$$

2) Est-ce que cette solution est unique ?

$$\dots f'(x) = \cos(x) - 2 < 0 \forall x \in [0,1] \Rightarrow f \searrow \dots$$

f est strictement décroissante \Rightarrow la solution est c unique

3) Calculer une approximation de cette solution en utilisant la méthode de **Dichotomie (bissection)** avec une précision de 10^{-2} (04 itérations, 03 chiffre après le virgule)

k	a_k	b_k	$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	Signe de $f(a_k)$	Signe de $f(c_k)$	Signe de $f(a_k) \times f(c_k)$
1	0,000	1,000	0.500	> 0	> 0	> 0
2	0.500	1,000	0.750	> 0	> 0	> 0
3	0.750	1,000	0.875	> 0	> 0	> 0
4	0.875	1,000	0.937	> 0	< 0	< 0

Donc la solution $c \approx 0,937$

Exercice 02 (10 pts)

On veut calculer la racine α de l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = e^x - x - 2$ par la méthode de **point fixe** pour $x \in [1, 2]$.

En prenant : $g_1(x) = e^x - 2$ et $g_2(x) = \ln(2+x)$

- 1) Comment ont obtenu ces fonctions g_1 et g_2 ? justifier votre réponse

$f(x) = e^x - x - 2 \quad x \in [1, 2]$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^x - 2 = g_1(x)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = x + 2 \Leftrightarrow x = \ln(x+2) = g_2(x)$

- 2) Etudier la convergence de g_1 et g_2 pour $x \in [1, 2]$.

$g_1'(x) = e^x$ si $1 \leq x \leq 2$; $e^1 \leq e^x \leq e^2 \rightarrow 2,718 \leq g_1'(x) \leq 7,389 \Rightarrow$ la méthode de point fixe est

diverge. Car $|g_1'(x)| > 1 \forall x \in [1, 2]$

$g_2'(x) = \frac{1}{x+2}$ si $1 \leq x \leq 2$; $3 \leq x+2 \leq 4 \rightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow$ la méthode de point fixe est converge.

Car $|g_2'(x)| \leq \frac{1}{3} < 1 \forall x \in [1, 2]$

- 3) Faire 2 itérations à partir de $x_0 = 1$ pour donner la solution de $f(x) = 0$ avec une précision 10^{-3}
(méthode de point fixe pour g_1 et g_2)

On a $x_{k+1} = g(x_k)$

✓ Pour g_1
 ~~$x_1 = g_1(x_0) = e^1 - 2$~~
 ~~$x_2 = g_1(x_1) = g_1(e^1 - 2) = e^{e^1 - 2} - 2$~~ ;

✓ Pour g_2

~~$x_1 = g_2(x_0) = g_2(1) = \ln(3);$~~
 ~~$x_2 = g_2(x_1) = g_2(\ln(3)) = \ln(\ln(3) + 2)$~~
 $x_2 = 1,1309$

Donc la solution $c \approx 1,1309$

Exercice02 (10 pts)

On veut calculer la racine α de l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = e^x - x - 2$ par la méthode de **point fixe** pour $x \in [1, 2]$.

En prenant : $g_1(x) = e^x - 2$ et $g_2(x) = \ln(2+x)$

- 1) Comment ont obtenu ces fonctions g_1 et g_2 ? Justifier votre réponse.

.....
.....
.....
.....

- 2) Etudier la convergence de g_1 et g_2 pour $x \in [1, 2]$.

- 3) Faire 2 itérations à partir de $x_0 = 1$ pour donner la solution de $f(x) = 0$ avec une précision 10^{-3}
 (méthode de point fixe pour g_1 et g_2)