UNIV, Mohamed Boudiaf, M'sila
Département du GE

Option: Automatique et systèmes

Corrigé type de l'EFS

Commande optimale

EX01: ① $\ddot{y}-4\dot{y}+3y=-3t^2+2t$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=0$

La solution globale est $y_g = y_H + y_p$ 0,25

y_H : solution de l'équation homogène : $\ddot{y}-4\dot{y}+3y=0$ 0,25

polynôme caractéristique : p^2-4p+3 0,25

$\Delta = 16-12 = 4$ 0,25 $\Longrightarrow \begin{cases} p_1 = 1 & 0{,}25 \\ p_2 = 3 & 0{,}25 \end{cases}$

La solution : $y_H = C_1 e^{t} + C_2 e^{3t}$ 0,25

y_p : solution particulière de l'équation : $\ddot{y}-4\dot{y}+3y=-3t^2+2t$ 0,25

Comme $b=3\neq 0$ 0,25, cherchons y_p sous la forme :

$y_p = at^2+bt+c$ 0,5

$$\begin{cases} y_p' = 2at+b & 0{,}25 \\ y_p'' = 2a & 0{,}25 \end{cases}$$

On a : $\ddot{y}_p - 4\dot{y}_p + 3y_p = -3t^2+2t$ 0,25

$\Longleftrightarrow 2a-4(2at+b)+3(at^2+bt+c) = -3t^2+2t$ 0,25

$\Longleftrightarrow 3at^2+(3b-8a)t+2a-4b+3c = -3t^2+2t$ 0,25

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3a = -3 \\ 3b-8a = 2 \\ 2a-4b+3c = 0 \end{cases} \text{0,25} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 & 0{,}25 \\ b = -2 & 0{,}25 \\ c = -2 & 0{,}25 \end{cases}$$

$y_p = -t^2-2t-2$ 0,25

$y_g = y_H + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{3t} - t^2 - 2t - 2$ 0,25

$y'_g = C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} - 2t - 2$ 0,25

$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 - 2 = 0 \text{ 0,25} \\ y'(0) = C_1 + 3C_2 - 2 = 0 \text{ 0,25} \end{cases} \Rightarrow 2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ 0,25

(Mauvais choix de $y'(0)$) 0,25 conditions initiales mal choisies.

$\Rightarrow \boxed{y_g = 2e^t - t^2 - 2t - 2}$ 0,25

C_2 doit être différent de zéro 0,25

2) $y' + y = 2\sin(t)$

La solution globale est $y_g = y_H + y_p$ 0,25

y_H : solution de l'équation $y' + y = 0$ 0,25

L'équation caractéristique: $r + 1 = 0$ 0,25 -1 est racine de l'équation $\Rightarrow y_H = Ke^{-t}$ 0,25

y_p : solution particulière de l'équation: $y' + y = 2\sin(t)$

Cherchons y_p sous la forme: $y_p = A\cos(t) + B\sin(t)$ 0,5

$y'_p = -A\sin(t) + B\cos(t)$ 0,5

$y'_p + y_p = 2\sin(t) \Leftrightarrow -A\sin(t) + B\cos(t) + A\cos(t) + B\sin(t) = 2\sin(t)$ 0,25 0,25

$(A+B)\cos(t) + (B-A)\sin(t) = 2\sin(t)$ 0,25

$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \text{ 0,25} \\ B - A = 2 \end{cases} \Rightarrow 2B = 2$ 0,25 $\Rightarrow \begin{cases} B = 1 \text{ 0,25} \\ A = -1 \text{ 0,25} \end{cases}$

$y_p = -\cos(t) + \sin(t)$ 0,25

- Etape ① Formuler l'Hamiltonien : $H(x,\lambda,u) = L(x,u,t) + \lambda f(x,u,t)$ 0,25

- Etape ② obtenir les équations d'état et d'état adjointes. 0,25

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$ 0,25 0,25

Etape ③ obtenir la condition nécessaire d'optimalité 0,25

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Etape ④ donner les conditions de transversalité

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \lambda^T\right)\delta x_f + \left(\frac{\partial h}{\partial t} + H\right)\delta t_f = 0$$ 0,25

② minimiser $J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (3x^2+u^2)\,dt$

s.à $\begin{cases} \dot{x} = x+u \\ x(0)=2,\ x(1)=0 \end{cases}$

$H = \frac{1}{2}(3x^2+u^2) + \lambda(x+u)$ 0,25

$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x+u$ ① 0,25

$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -3X -$ ② 0,25

$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0$ ③ 0,25 $\Rightarrow \boxed{u^* = -\lambda}$ 0,25

en remplace u dans ① on a :

$$\begin{cases} \dot{x} = X - \lambda \\ \dot{\lambda} = -3X - \lambda \end{cases} \text{0,25} \quad \begin{cases} \lambda = x - \dot{x} \\ \dot{\lambda} = -3X - \lambda \end{cases} \text{0,25} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda} = \dot{X} - \ddot{X} \\ \dot{\lambda} = -3X - \lambda \end{cases}$$

$\dot{X} - \ddot{X} = -3X - \lambda = -3X - X + \dot{X}$ 0,25

$\Rightarrow \ddot{X} = 4X \Rightarrow \ddot{X} - 4X = 0$ 0,25

équation caractéristique : $P^2 - 4 = 0$ 0,25 , $\Delta = 16$ 0,25

$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = -2 \\ P_2 = 2 \end{cases}$ 0,25 $\Rightarrow x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$ 0,25

$\dot{x}(t) = -2C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{2t}$ 0,25

$\ddot{x}(t) = 4C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{2t}$

$x(0) = C_1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 2 - C_1$ 0,25

$x(1) = C_1 e^{-2} + C_2 e^{2} = 0$ 0,25

$\Rightarrow C_1 e^{-2} + 2e^{2} - C_1 e^{2} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{2e^{2}}{e^{2} - e^{-2}} = 2,037$ 0,25

$\boxed{C_2 = 0,037}$ 0,25

$u(t) = -\lambda = -\dot{x} + x = 2C_1 e^{-2t} - 2C_2 e^{2t} + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$ 0,25

$\boxed{u^*(t) = 3C_1 e^{-2t} - C_2 e^{2t}}$ 0,25

$\boxed{u^*(t) = 6,11 e^{-2t} - 0,037 e^{2t}}$ 0,25

5