Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté de Technologies

$1^{ère}$ année S.T

Module: Mathématiques 02 **Le 25 /10/ 2020**

Correction d'examen final

Exercice 01 (14pts) -

A) Cocher la bonne réponse pour chaque question **(6pts)**

① La valeur de l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi \sin(10x)dx$ est **(2pts)**

a) $\frac{\pi}{10}$ ☐. b) $-\frac{\pi}{5}$ ☒. c) $\frac{\pi}{5}$ ☐.

② L'équation $x^2y' + xy = y^2 + 4x^2$ est une équation différentielle **(2pts)**

a) de Bernoulli ☐. b) homogène. ☒. c) à variables séparables . ☐.

③ Une solution particuliére de l'équation $2y' - y = \cos(x)$ est **(2pts)**

a) $y_p = -\frac{1}{5}\cos(x) + \frac{2}{5}\sin(x)$ ☒. b) $y_p = \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{2}{5}\sin(x)$ ☐.

B) Calculer les intégrales suivantes **(8pts)**

① $\int \frac{xe^x + e^x}{xe^x + 1}dx$. **(2pts)**

On a $(xe^x + 1)' = xe^x + e^x$, d'ou

$$\int \frac{xe^x + e^x}{xe^x + 1}dx = \int \frac{(xe^x + 1)'}{xe^x + 1}dx = \boxed{\ln|xe^x + 1| + c}$$

② $\int \frac{x-2}{(x-4)(x-5)}dx$. **(2pts)** On a

$$\frac{x-2}{(x-4)(x-5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-5}.$$

⋆ Calcule de A et B.

$$\bullet A = \lim_{x\to4} \frac{\cancel{(x-4)}(x-2)}{\cancel{(x-4)}(x-5)} = -2 \qquad \bullet B = \lim_{x\to5} \frac{\cancel{(x-5)}(x-2)}{(x-4)\cancel{(x-5)}} = 3.$$

D'ou

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{(x-4)(x-5)}dx &= -2\int \frac{1}{x-4}dx + 3\int \frac{1}{x-5}dx \\ &= \boxed{-2\ln|x-4| + 3\ln|x-5| + c}\end{aligned}$$

③ $\displaystyle\int \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}-9e^x+20}dx$. **(2pts)**
On pose $t=e^x \implies dt=e^x dx$, d'ou:

$$\begin{aligned}\int \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}-9e^x+20}dx &= \int \frac{t-2}{t^2-9t+20}dt\\ &= \int \frac{t-2}{(t-4)(t-5)}dt\\ &= -2\ln|t-4|+3\ln|t-5|+c\\ &= \boxed{-2\ln|e^x-4|+3\ln|e^x-5|+c}\end{aligned}$$

④ $\displaystyle\int x\cos(x)dx$. **(2pts)**
On pose

$$\begin{cases} u(x)=x\\ v'(x)=\cos(x)\end{cases} \implies \begin{cases} u'(x)=1\\ v(x)=\sin(x)\end{cases}$$

D'ou

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)dx = \int u(x)v'(x)dx &= u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx\\ &= x\sin(x)-\int \sin(x)dx\\ &= \boxed{x\sin(x)+\cos(x)+c}, c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Exercice 02 : (6pts)

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$y'-y=e^x\sin(x) \qquad \text{(E)}$$

① **(2pts)** **Résolution de l'équation homogène (EH)**: L'équation homogène associes à (E) est

$$y'-y=0 \qquad \text{(EH)}$$

$\star$ Pour $y\neq 0$ on a:

$$\begin{aligned} y'-y=0 &\iff y'=y\\ &\iff \frac{y'}{y}=1\\ &\iff \int\frac{1}{y}dy=\int 1dx\\ &\iff \ln|y|=x+c\\ &\iff |y|=e^c\times e^x\\ &\iff \boxed{y=ke^x}, k=\pm e^c\end{aligned}$$

$\star$ $y=0$ est une solution évidente de (EH). Donc la solution homogène de (E) est

$$\boxed{y_h=ke^x},\quad k\in\mathbb{R}$$

② **(3pts)** **Résolution de l'équation avec second membre (E)**: Par la méthode de **variation de la constante**, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p=k(x)e^x$ vérifiant $y_p'-y_p=e^x\sin(x)...(\star)$. On a $y_p'=(k(x)e^x)'=k'(x)e^x+k(x)e^x$. En remplaçant y_p et y_p' dans l'équation $(\star)$, on trouve

$$k'(x)e^x + \cancel{k(x)e^x} - \cancel{k(x)e^x} = e^x \sin(x) \iff k'(x)e^x = \sin(x)e^x$$
$$\iff \int k'(x)dx = \int \sin(x)dx$$
$$\iff k(x) = -cos(x)$$

D'où une solution particuliére de (E) est $\boxed{y_p = k(x)e^x = -\cos(x)e^x}$. Donc la solution générale de l'équation E est

$$\boxed{y_G = y_h + y_p = ke^x - \cos(x)e^x = (k - \cos(x))e^x}$$

③ **(1pt)** Calculer la solution y_1 de (E) vérifiant $y_1(\pi) = 0$
On a
$$y_1(\pi) = (k - \cos(\pi))e^\pi = 0 \implies k - \cos(\pi) = 0 \implies k = \cos(\pi) = -1$$
Donc la solution de (E) vérifiant $y_1(\pi) = 0$ est $\boxed{y_1 = (-1 - \cos(x))e^x}$