Université de Mohamed Boudiaf M'Sila **Année:** $2019-2020$
Faculté des Science et Technologies **Le** $10-10-2020$
Module: MATHS 04 **Durée:** 60^{min}
Spécialités: Génie mécanique et Hydraulique.
Nom: **Prénom:** **Groupe:**

Epreuve du 4^{eme} semestre

Exercice 01: **(10pts=03+03+04)**

1. Ecrire les nombres complexes suivantes sous la forme trigonométrique
   - $z_1 = 1 + i\sqrt{3} =$ ....
   - $z_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{4i} =$ ....
   ....
   ....
2. Exprimer sous forme algébrique $z = x + iy$ les nombres complexes suivantes:
   - $Log\left(-e^2\right)$, ...
   ....
   ....
   - $(-1)^i$, ...
   ....
3. Représenter l'ensemble des points à chacun des cas
   - $2 < |z+1| + |i-1| \leq 3$..
   ....
   ....
   - $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right| = \sqrt{3}$..
   ....
   ....

Exercice 02: **(10pts=05+01+04)**
Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit les fonctions

$$f(z) = ax + iy + ie^z,\ \ g(z) = x + i\left(y + x^2 + y^2\right) \text{ et } h(z) = e^{\overline{z}} + z|z|$$

1. Les fonction g et h sont-elles holomorphes?
2. $A)$ Mettre $f(z)$ sous la forme $u(x,y) + iv(x,y)$.

   $B)$ Déterminer la constante a pour que la fonction $f(z)$ soit holomorphe. Et calculer sa dérivée.

Université de Mohamed Boudiaf M'Sila
Faculté des Science et Technologies
Module: MATHS 04
Spécialités: Génie mécanique et Hydraulique.

Année: $2019-2020$
Le $10-01-2020$
Durée: 1^h

Corrigé type d'épreuve du 4^{eme} semestre

Exercice 01: **(10pts=03+03+04)**

1. Ecrire les nombres complexes suivantes sous la forme trigonométrique

   - **1.5 pts=0.5+0.5+0.5**
   $z_1 = 1 + i\sqrt{3}, |z_1| = \sqrt{1+3} = 2$ et $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$
   Donc $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
   - **1.5 pts=0.5+0.5+0.5**
   Puisque $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ on a:

$$\begin{aligned}
z_2 &= \left(1+i\sqrt{3}\right)^{4i} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{4i} = 2^{4i}e^{-\frac{4\pi}{3}} \\
&= \left(e^{\log 2}\right)^{4i} e^{-\frac{4\pi}{3}} \\
&= \left(e^{i\log 16}\right) e^{-\frac{4\pi}{3}} \\
&= e^{-\frac{4\pi}{3}} e^{i\log 16} \\
&= e^{-\frac{4\pi}{3}} \left(\cos(\log 16) + i\sin(\log 16)\right)
\end{aligned}$$

2. Exprimer sous forme algébrique $z = x + iy$ les nombres complexes suivantes:

   - **1.5 pts=0.5+0.5+0.5**
   $Log\left(-e^2\right)$, La détermination principale du Logarithme est définie par: $Log(z) = \ln|z| + iArg(z)$, ou $z \in \mathbb{C}^*$ et $-\pi < Arg(z) \leq \pi$, alors:
   $Log\left(-e^2\right) = \ln\left|-e^2\right| + iArg\left(-e^2\right)$, $\left|-e^2\right| = e^2$ et $Arg\left(-e^2\right) = \pi$
   donc $Log\left(-e^2\right) = \ln\left(e^2\right) + iArg\left(-e^2\right) = 2 + i\pi$.
   - **1.5 pts=0.5+0.5+0.5**
   $(-1)^i = e^{i\log(-1)}$ et $\log(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1) + 2k\pi) = i(1+2k)\pi$
   Donc $(-1)^i = e^{-(1+2k)\pi}$.

3. Représenter l'ensemble des points à chacun des cas

   - **02 pts=01+01**

$$\begin{aligned}
2 &< |z+1| + |i-1| \leq 3 \Rightarrow 2 < |z+1| + \sqrt{2} \leq 3 \\
&\Rightarrow 2 - \sqrt{2} < |z+1| \leq 3 - \sqrt{2},
\end{aligned}$$

   L'ensemble des points est une couronne de centre $z_0(-1,0)$ et de la rayon intérieure $R_1 = 2 - \sqrt{2}$ et de la rayon extérieure $R_2 = 3 - \sqrt{2}$.

- 02 **pts=01**+01

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-2i}{z+1}\right| &= \sqrt{3}\Rightarrow |z-2i|=\sqrt{3}\,|z+1| \\ &\Longrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{3}\sqrt{(x+1)^2+y^2} \\ &\Longrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{15}{4}\end{aligned}$$

L'ensemble des points est un cercle de centre $\left(\frac{-3}{2},-1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Exercice 02: **(10pts**=05+01+04**)**

Soit $z=x+iy$ où x et y sont deux réels et soit les fonctions

$$f(z)=ax+iy+ie^{z},\;\; g(z)=x+i\left(y+x^2+y^2\right)\;\text{ et }\; h(z)=e^{\overline{z}}+z\,|z|$$

1. 0**2.5 pts=01**+01**+0.5**

   Les fonction g et h sont-elles holomorphes?

$$h(z)=e^{\overline{z}}+z\,|z|=e^{\overline{z}}+z\sqrt{z\overline{z}}$$

La fonction h est holomorphe si elle vérifie la condition $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=e^{\overline{z}}+\frac{z^2}{2\,|z|}\neq 0$$

Donc la fonction h n'est pas holomorphe.

*0**2.5 pts=0.5**+**0.5+0.5+0.5**+**0.5**

$$g(z)=x+i\left(y+x^2+y^2\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} u(x,y)=x, \\ v(x,y)=y+x^2+y^2.\end{array}\right.$$

La fonction g est holomorphe si elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{array}\right.$$

Ainsi, nous avons

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial u}{\partial x}=1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=1+2y,,\end{array}\right. \quad\text{et}\quad \left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2x.\end{array}\right.$$

Donc la fonction g n'est pas holomorphe.

2. A) Mettre $f(z)$ sous la forme $u(x,y)+iv(x,y)$.

On a la fonction $f\left(z\right)=ax+iy+ie^{z}$. Nous remplaçons $z=x+iy$, nous obtenons:

$f\left(x+iy\right)=ax+iy+ie^{x+iy}=ax+iy+ie^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)$

Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{c} u(x,y)=ax-e^{x}\sin y, \\ v(x,y)=y+e^{x}\cos y. \end{array}\right.$$

B) Déterminer la constante a pour que la fonction $f(z)$ soit holomorphe. Et calculer sa dérivée.

La fonction f est holomorphe si elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{array}\right.$$

Ainsi, nous avons

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial x}=a-e^{x}\sin y, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=1-e^{x}\sin y,\ , \end{array}\right. \text{et} \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\cos y, \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}=-e^{x}\cos y. \end{array}\right.$$

Ceci implique que $a=1$. Et la dérivée de la fonction f est

$$\begin{array}{rcl} f'\left(x+iy\right) & = & \dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}-i\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ & = & -e^{x}\sin y+ie^{x}\cos y \\ & = & ie^{x}\left(\cos y+i\sin y\right). \end{array}$$