Université de M'sila(2020/2021) **Le 23/05/2021**
Département des Sciences Techniques **Durée**: $1h$
1$^{\text{ière}}$année Energie Renouvelable et environnement

Epreuve du 2èmesemestre
Module: Mathématiques 02

Exercice 01 (8 *pts*)

Calculer les intégrales suivantes

$$I=\int_0^\pi x\cos(2x)dx=\left[\tfrac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi-\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2x)dx,\ \text{par parties}$$
$$=\left[\tfrac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^\pi=0$$
$$J=\int\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)}dx=\int\frac{-10}{(x-1)}dx+\int\frac{13}{(x-2)}dx$$
$$=-10\ln|x-1|+13\ln|x-2|+c,\ \text{où } c \text{ est une contante}$$

Exercice 02 (12 *pts*)

1) Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y'+2y=3e^x$$

$$y_G=y_h+y_p$$

1- la solution homogène y_h
$y'+2y=0$, alors $\int\frac{dy}{y}=\int-2dx$, ainsi $\ln y=-2x+c$, où c est une contante, donc

$$y_h=ke^{-2x},\ \text{où } k=e^c \text{ est une contante}$$

2- la solution particulière, on utilise la méthode de variation des constantes, posant $y_p=k(x)e^{-2x}$, alors $y_p=k'(x)e^{-2x}-2k(x)e^{-2x}$, on a
$k'(x)e^{-2x}-2k(x)e^{-2x}+2k(x)e^{-2x}=3e^x$, $k(x)=e^{3x}\ +\lambda$ d'où

$$y_p=e^x+\lambda e^{-2x}$$

Donc la solution générale de l'équation est

$$y_G=e^x\ +\lambda e^{-2x},\ \text{où } \lambda \text{ est une constante}$$

2) On considère l'équation différentielle du second ordre suivante

$$y''-3y'+2y=e^x \qquad \text{(E)}$$

a) Trouver y_h la solution de l'équation homogène associée

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ amet 2 solution réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, alors

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \text{ où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ deux constantes}$$

b) Montrer que l'équation différentielle (E) admet une solution particulière de la forme

$$y_p = axe^x,\ \ a \in \mathbb{R}$$

$y_p = axe^x \implies y_p' = (ax + a)\, e^x \implies y_p'' = (ax + 2a)\, e^x$, si on remplace dans (E), on trrouve

$((ax + 2a) - 3\,(ax + a) + 2ax)\, e^x = e^x$, alors $a = -1$ donc

$$y_p = -xe^x$$

c) Déterminer l'ensemble de toutes les solutions de (E)

$$y_G = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + -xe^x, \text{ où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ deux constantes}$$