Université MOHAMED BOUDIAF de M'SILA
Faculté de Technologie
Département de génie civil

Année universitaire 2021/2022
Domaine ST
durée : 1h30min

Corrigé type de l'épreuve de « Ondes et Vibrations »

Questions de cours (7pts)

Cochez la ou les bonne(s) réponse(s) :

1- La pseudo pulsation ω_a d'un système faiblement amorti est : $\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ [x] 1 $\quad \xi$ [ ] $\quad \delta$ [ ]

2- Le décrément logarithmique D d'un système faiblement amorti est : $-\alpha v$ [ ] $\quad \delta T_a$ [x] 0.5 $\quad \delta\frac{T_0}{\sqrt{1-2\xi^2}}$ [x] 0.5

3- Un système vibratoire en régime d'amortissement critique, revient à l'équilibre :
lentement [ ] rapidement [x] 1 jamais [ ]

4- Un système vibratoire en régime d'amortissement fort, revient à l'équilibre :
lentement [x] 1 rapidement [ ] jamais [ ]

5- Un système résonant sous l'effet d'une excitation harmonique a pour pulsation de résonnance Ω_r égale à :
$\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$ [x] 0.5 $\quad \omega_a\sqrt{1-2\delta^2}$ [ ] $\quad \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ [x] 0.5

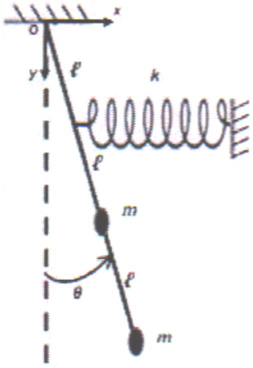
6- L'équation de mouvement d'un système libre faiblement amorti est :
$q(t)=A.\cos(\omega_0 t+\varphi)$ [ ] $\quad q(t)=Ae^{-\delta t}\cos(\omega_a t+\varphi)$ [x] 1

7- La largeur de la bande passante $\Delta\omega$ est :
$2\xi\omega_0$ [x] 0.5 $\quad 2\delta$ [x] 0.5 $\quad 2Q$ [ ]

Exercice №1 (7pts)

I-1- l'énergie cinétique $T(\theta)$: $\quad T=T_1+T_2$

$$\begin{cases} T_1=\frac{1}{2}mv_1^2 \\ T_2=\frac{1}{2}mv_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{0.5}{v_1=2l\dot\theta} \\ v_2=3l\dot\theta \end{cases} \Rightarrow T=2ml^2\dot\theta^2+\frac{9}{2}ml^2\dot\theta^2=\frac{13}{2}ml^2\dot\theta^2 \quad \underline{0.5}$$



I-2- l'énergie potentielle $U(\theta)$: $\quad U=U_1+U_2+U_k$

$$\begin{cases} U_1=2mgl(1-cos\theta) \quad \underline{0.5} \\ U_2=3mgl(1-cos\theta) \\ U_k=\frac{1}{2}k(x_k)^2 \end{cases} \quad ;\ \overset{0.5}{x_k=l\theta}$$

$$\theta \ll\Rightarrow \cos\theta\approx 1-\frac{\theta^2}{2}\Rightarrow \begin{cases} U_1\overset{0.5}{=}mgl\theta^2 \\ U_2=\frac{3}{2}mgl\theta^2 \\ U_k=\frac{1}{2}k(l\theta)^2 \end{cases} \Rightarrow U=\frac{1}{2}k(l\theta)^2+\frac{5}{2}mgl\theta^2$$

donc :

$$U=\frac{1}{2}(kl^2+5mgl)\theta^2 \quad \underline{0.5}$$

3- Le Lagrangien $\mathcal{L}$, l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0.

- Le Lagrangien $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}=T-U=\frac{13}{2}ml^2\dot\theta^2-\frac{1}{2}(kl^2+5mgl)\theta^2 \quad \underline{0.5}$$

- L'équation du mouvement :
  L'équation de Lagrange d'un system libre non amorti est de type :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=0 \quad \underline{0.5}$$

Après dérivation on obtient :

$$13ml^2\ddot{\theta} + (kl^2 + 5mgl)\theta = 0 \qquad \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(kl + 5mg)}{13ml}\theta = 0 \quad \underline{0.5}$$

L'équation est de type :

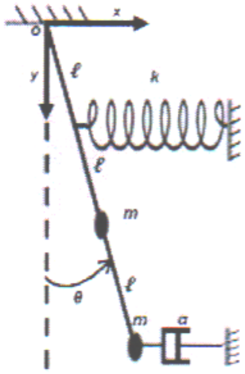
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

La pulsation propre ω_0 est alors :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(kl + 5mg)}{13ml}} \quad \underline{0.5}$$

II-1 Démonstration de l'expression de la fonction de dissipation : $D_a = \frac{9}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$

$$\underline{0.5} \quad \begin{cases} D_a = \frac{1}{2}\alpha v_2^2 \\ v_2 = 3l\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow D_a = \frac{9}{2}\alpha\, l^2\dot{\theta}^2$$



II-2 L'équation du mouvement en présence de frottements visqueux :

L'équation de Lagrange d'un system libre amorti est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial D_a}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \underline{0.5}$$

Donc et après dérivation il en découle :

$$13ml^2\ddot{\theta} + 9\alpha l^2\dot{\theta} + (kl^2 + 5mgl)\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{9\alpha}{13m}\dot{\theta} + \frac{(kl + 5mg)}{13ml}\theta = 0 \quad \underline{0.5}$$

II-3 Le coefficient d'amortissement δ :

L'expression de l'équation différentielle d'un système libre amorti étant de la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Par identification on en tire :

$$2\delta = \frac{9\alpha}{13m} \Rightarrow \delta = \frac{9\alpha}{26m} \quad \underline{0.5}$$

<u>ExerciceNº2</u> (6pts)

1. Déduire des grandeurs ω_0, δ, ainsi que F_0 et Ω de l'excitation extérieure appliquée.

$$\ddot{q} + 4\dot{q} + 6q = 5\cos(4t)$$
$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 F_0 \cos(\Omega t) \quad \underline{0.5}$$

Donc et par identification :

$$\begin{cases} 2\delta = 4 \\ \omega_0^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = 2s^{-1} \ \underline{0.5} \\ \omega_0 = 2.449\, rd.s^{-1} \ \underline{0.5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_0^2 F_0 = 5 \Longrightarrow F_0 = 0{,}83N \ \underline{0.5} \\ \Omega = 4\, rd.s^{-1} \ \underline{0.5} \end{cases}$$

2- Calcule du rapport d'amortissement ξ et du facteur de qualité Q :

$$\underline{0.5} \ \xi = \frac{\delta}{\omega_0} \Rightarrow \xi = 0.817 \quad \underline{0.5}$$

$$\underline{0.5} \ Q = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow Q = 0.612 \quad \underline{0.5}$$

3- Le phénomène de résonance est observable si : $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\underline{0.5}$

Or dans notre cas nous avons : $\underset{\underline{0.5}}{\xi = 0.817} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ la résonance ne peut pas avoir lieu dans le système. $\underline{0.5}$