Corrigé type MATHS03 / 2021-2022

Exercice 01 : Etudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3+1}{n^3}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^3} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum \frac{n^3+1}{n^3}$ D.V   2,00

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{4}{(2n+1)(2n+1)} \simeq \sum \frac{4}{4n^2} = \sum \frac{1}{n^2}$.

D'après Riemann $\alpha = 2 > 1$ alors la Série C.V   2

3) $\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$; D'après Cauchy.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}$, $n^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}\times \ln n}$.

$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln n}{n}\times \ln n}}{\ln n}$: ũ εC (L'opitole)   2

Donc $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$, D'après Cauchy : $\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ C.V

4) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n} = \sum (-1)^n \times \frac{1}{n}$ D'après D'abele (ou Leibn

$V_n = \frac{1}{n}$ (0,1) ; $u_n = (-1)^n$ (0,1)

$\sum U_n$ est bornée $\sum |(-1)^n| \leq 1$ (0,1)

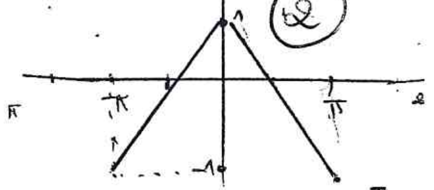
$V_{n+1} - V_n = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$ (V_n Décroissante)

Alors : $\sum (-1)^n$ est C.V (0,1)

Exercice 02   8pts $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2x}{\pi} & ; \ x \in [0, \pi] \\ 1 + \dfrac{2x}{\pi} & ; \ x \in [-\pi, 0] \end{cases}$

$T = 2\pi$, $\ell = \pi$, $w = 1$ 0,5

1/ f : 2π périodique $\Rightarrow b_n = 0$ 1



2

1,5 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[x - \frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\pi} = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n w x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos n w x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\cos n x\,dx \quad (\text{I.P.P})$$ 2

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancelto{0}{\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\frac{\sin n x}{n}\Big|_0^{\pi}} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin n x\,dx\right] = \frac{4}{n\pi^2}\left[-\frac{\cos n x}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 - (-1)^n\right] ; \ n > 0.$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{8}{(2k+1)^2\pi^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Donc : la série de Fourier

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$ 1