**Université de Mohamed Boudiaf M'Sila** **Année:** $2021-2022$
**Faculté des Science et Technologies** **Le** $23-01-2020$
**Module:** MATH 03 **Durée:** $1^h30^{\text{min}}$
**Spécialités:** Génie mécanique et Hydraulique.

# Corrigé type d'epreuve du $3^{eme}$ semestre

**Exercice 01:** **(6pts=0**2+02+02**)**

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}+\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}$

   $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)^n=\frac{1}{2}<1$, La série de terme général $u_n=\frac{1}{2^n}$ converge alors $2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ converge.

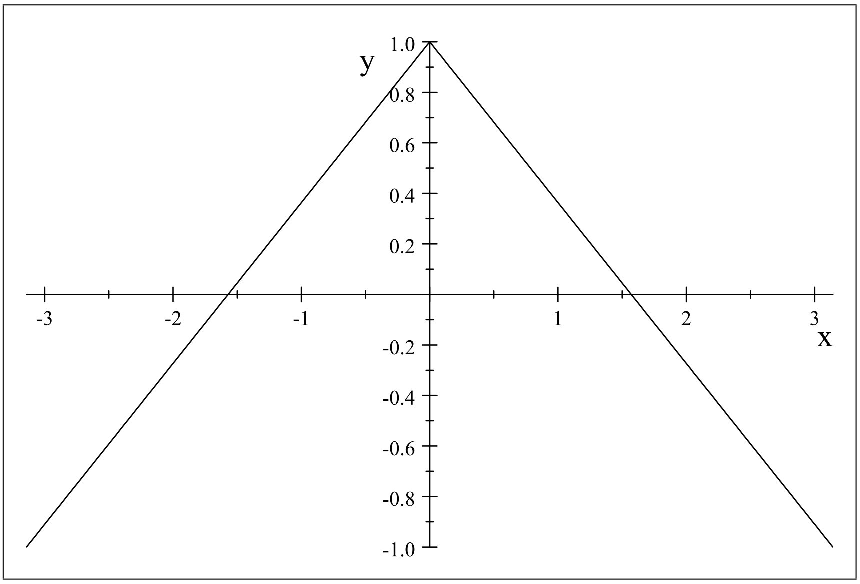
   $\frac{(-1)^n}{2^n}$ est positif, décroissant et tend vers 0, d'après le critère de Leibniz la série converge.

   Donc $\sum_{n\geq 0}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ est convergente.

2. $\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^2}\right)=0<1$, La série de terme général $u_n=\frac{n!}{n^2}$ converge.

3. $\lim_{n\longrightarrow\infty}u_n=1\neq 0$ donc la série diverge.

**Exercice 02:** **(8pts**=01+04+03**)**



1. $T=2\pi \Longrightarrow L=\pi$ et $\alpha=0$. et $f$ paire alors

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^{\alpha+2L} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1-\frac{2t}{\pi}dt = 0,\\
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^{\alpha+2L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2t}{\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt\\
&= \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{n^2\pi^2},\\
b_n &= 0 \text{ puisque } f \text{ est paire}
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall t\in\mathbb{R}, S_n(t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^2}\cos nt = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

2. En déduire les sommes $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

   L'égalité $f(0)=1$ fournit $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

   D'autre parte, puisque $f$ est par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de période $2\pi$, la formule de Perseval fournit

$$\begin{aligned}
\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f^2(t)\,dt \text{ et } f \text{ paire et } a_0=0\\
\text{alors}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2 &= \frac{2}{L}\int_0^{\alpha+2L} f^2(t)\,dt
\end{aligned}$$

   et donc

$$\begin{aligned}
\frac{64}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^4} &= \frac{2}{3}\\
\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^4} &= \frac{\pi^2}{96}.
\end{aligned}$$

**Exercice 03: (6pts**=02+01+03)

1. Trouver l'image par transformation de Laplace de:

   $A)\ f(t) = 1+t^2+\cos\left(\sqrt{2}t\right)+e^{2t}\sin(t)$

   $\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}+\frac{2}{s^3}+\frac{s}{s^2+2}+\frac{1}{(s-2)^2+1}$

   $B)\ g(t) = e^{-3t}\left(t^2+1\right)^2$

   $\mathcal{L}\left(\left(t^2+1\right)^2\right) = \mathcal{L}\left(t^4+2t^2+1\right) = \frac{4!}{s^5}+2\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{s}$ pour $s>0$

   et $\mathcal{L}\left(e^{\alpha t}f(t)\right) = F(s-\alpha)$ donc

   $G(s) = \frac{4!}{(s+3)^5}+\frac{4}{(s+3)^3}+\frac{1}{(s+3)},$

2.
$$\begin{cases} u'(t) - 2u(t) = 2te^{2t}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Par la transformation de Laplace, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(u'(t) - 2u(t)\right) &= \mathcal{L}\left(2te^{2t}\right), \\ (s-2)\,\mathcal{L}\left(u(t)\right) &= \frac{2}{(s-2)^2} + 1, \\ \mathcal{L}\left(u(t)\right) &= \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{1}{(s-2)}, \end{aligned}$$

par la transformation inverse de Laplace, on peut alors conclure que la solution est:

$$u(t) = \left(t^2 + 1\right) e^{2t}.$$