Université MOHAMED BOUDIAF de M'SILA
Faculté de Technologie
Département de génie mécanique

Année universitaire 2021/2022
Domaine ST
durée : 1h30min

Corrigé type : Ondes et Vibrations

Questions de cours (7pts)

Cochez la ou les bonne(s) réponse(s) :

1- La pseudo pulsation $\boldsymbol{\omega_a}$ d'un système faiblement amorti est : **(a)-** $\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ 1,0

0,5

2- Le décrément logarithmique $\boldsymbol{D}$ d'un système faiblement amorti est : **(b)-** δT_a **(c)-** $\delta \frac{T_0}{\sqrt{1-2\xi^2}}$

0,5

3- Un système vibratoire en régime d'amortissement critique, revient à l'équilibre : **(b)-** rapidement 1,0

4- Un système vibratoire en régime d'amortissement fort, revient à l'équilibre : **(a)-**lentement 1,0

5- Un système résonant sous l'effet d'une excitation harmonique a pour pulsation de résonnance $\boldsymbol{\Omega_r}$ égale à :

0,5 **(a)-** $\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$ 0,5 **(c)-** $\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$

1,0

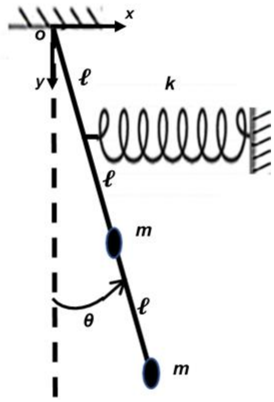
6- L'équation de mouvement d'un système libre faiblement amorti est : **(b)-** $q(t)=Ae^{-\delta t}\cos(\omega_a t+\varphi)$

7- La largeur de la bande passante $\boldsymbol{\Delta\omega}$ est : **(a)-** $2\xi\omega_0$ 0,5 **(b)-** 2δ 0,5

Exercice 1 (7pts)

I-

1- l'énergie cinétique $T(\theta)$: $T=T_1+T_2$



$$\begin{cases} T_1=\frac{1}{2}mv_1^2 \\ T_2=\frac{1}{2}mv_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=2l\dot{\theta} \\ v_2=3l\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow T=2ml^2\dot{\theta}^2+\frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2=\frac{13}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$ 1,0

2- l'énergie potentielle $U(\theta)$: $U=U_1+U_2+U_k$

$$\begin{cases} U_1=2mgl(1-\cos\theta) \\ U_2=3mgl(1-\cos\theta) \\ U_k=\frac{1}{2}k(x_k)^2 \end{cases} \quad ;\ x_k=l\sin\theta$$ 0,5

$$\theta \ll \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1=mgl\theta^2 \\ U_2=\frac{3}{2}mgl\theta^2 \\ U_k=\frac{1}{2}k(l\theta)^2 \end{cases} \Rightarrow U=\frac{1}{2}k(l\theta)^2+\frac{5}{2}mgl\theta^2$$ 0,5

donc : $U=\frac{1}{2}(kl^2+5mgl)\theta^2$ 0,5

3- Lagrangien $\mathcal{L}$ puis l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0.

- Lagrangien $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}=\frac{13}{2}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}(kl^2+5mgl)\theta^2$ 0,5

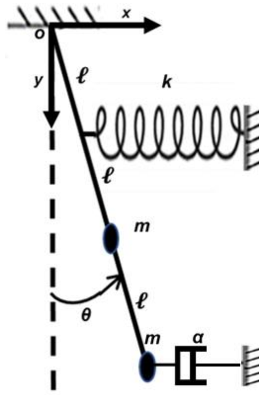
- L'équation du mouvement :

System libre non amorti : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{13ml^2\ddot{\theta} + (kl^2 + 5mgl)\theta = 0} \qquad \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(kl + 5mg)}{13ml}\theta = 0$$

0,5

- La pulsation propre ω_0 :



$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(kl+5mg)}{13ml}}$$: pulsation propre

0,5

II-

1- Montrer que la fonction de dissipation notée D_a est donnée par : $D_a = \frac{9}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$

$$\begin{cases} D_a = \frac{1}{2}\alpha v_2^2 \\ v_2 = 3l\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow D_a = \frac{9}{2}\alpha\, l^2\dot{\theta}^2$$

1,0

2- Déduire l'équation du mouvement dans ce cas.

System libre- amorti : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial D_a}{\partial \dot{\theta}} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{13ml^2\ddot{\theta} + 9\alpha l^2\dot{\theta} + (kl^2 + 5mgl)\theta = 0} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{9\alpha}{13m}\dot{\theta} + \frac{(kl + 5mg)}{13ml}\theta = 0$$

1,0

3- Donner le coefficient d'amortissement δ.

$$2\delta = \frac{9\alpha}{13m} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{9\alpha}{26m}$$

1,0

Exercice 2 (6pts)

1. Déduire de l'équation ci-dessus la pulsation propre ω_0, le coefficient d'amortissement δ, ainsi que l'amplitude F_0 et la pulsation Ω de la force extérieure appliquée.

$$\ddot{q} + 4\dot{q} + 6q = 5\cos(4t)$$
$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = F_0\cos(\Omega t)$$

Donc :

$$\begin{cases} 2\delta = 4 \\ \omega_0^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = 2s^{-1} \\ \omega_0 = 2.449\, rd.s^{-1} \end{cases}$$

0,5

0,5

$$\begin{cases} F_0 = 5\, N \\ \Omega = 4\, rd.s^{-1} \end{cases}$$

0,5

0,5

2- Calculer le rapport d'amortissement ξ et en déduire le facteur de qualité Q.

$$\xi = \frac{\delta}{\omega_0} \Rightarrow \xi = 0.817$$

1,0

$$Q = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow Q = 0.612$$

1,0

3- Est-il possible d'observer la résonance ? Si oui pour quelle valeur de Ω_r se produit-elle ?

Le phénomène de résonance :

Pour observer le phénomène de résonance $\Rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

1,0

Dans ce cas : $\xi = 0.817 > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ il ne pas de résonance.

1,0