Université de Mouhamed Boudiaf.M'sila

Faculté des Sciences et Technologies **AnnéeUniversitère :2021/2022**

Module : Mathématique 3 **Resp :Guellati.Z**

Corrigé type (Math3)

Exercice1 : (2+2+1pts)

- étudier la convergence de : **1)** $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\sqrt{n}}{n^2}$, **2)** $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(n+6)^5}$, 3) $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{5}$

---

1) $\left|\cos\sqrt{n}\right| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\cos\sqrt{n}}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est série de Riemann converge

$\Longrightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{\cos\sqrt{n}}{n^2}$ **converge absolument. (2pts)**

2) $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^n}{(n+6)^5}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+6)^5} \approx \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^5}$ série de Riemann converge

$\Longrightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(n+6)^5}$ **converge absolument. (2pts)**

3) $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{5} = \frac{1}{5}\sum_{n\geq 0}2^n$ série géométrique (q=2> 1) **diverge (1pts)**

Exercice2 : (4+1+3pts)

1) Trouver la série de Fourier en série de cosinus de $f$définie par $f(x) = x$ sur$[0,2[$

2) Trouver la somme de Fourier en $x = -1$

3) En déduire les sommes des séries :, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$

---

1) soit $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0,2[\\ -x & si\ x \in [-2,0[\end{cases}$ $\tilde{f}$ un prolongement pair de f

$\tilde{f}$ est periodique de periode 4 , $\tilde{f}$ est paire donc : $b_n = 0$ **(1pts)** , $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}\tilde{f}(x)dx = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)dx = \frac{4}{4}\int_0^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2 \textbf{ (1pts)}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{f}(x)\cos n\omega x\, dx = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x\, dx = \frac{4}{4}\int_0^2 x\cos n\frac{\pi}{2}x\ dx =$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & si\ n = 2k \\ \frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2} & si\ n = 2k+1 \end{cases} \textbf{(1pts)}$$

la série de Fourier est : $\mathbf{1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}x}$ **(1pts)**

2) $S(-1) = 1$ **(1pts)**

3) a) si $x = 0$: : $1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos(2k+1).\frac{\pi}{2}.0 = 0$

$$1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = 0 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \textbf{(1.5pts)}$$

b) D'après **L'égalité de Parseval** :

$$2+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{64}{(2k+1)^4\pi^4} = \int_0^2 x^2dx \Longrightarrow 2 + \frac{64}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{64}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \textbf{(1.5pts)}$$

<u>Exercice3</u> : (3+2+2pts)

I) trouver l'image de : $f(t) = \cos 2t + t^2\cos 3t + e^{-t}\sin t + t^3$

II) Trouver l'inverse par Laplace de : $F(p)=e^{-2p}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2+1}\right)$, $F(p)=\frac{p-3}{(p+1)^2}$

I) $\mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{L}(\cos 2t + t^2\cos 3t + e^{-t}\sin t + t^3)(p)$

$$= \mathcal{L}(\cos 2t) + \mathcal{L}(t^2\cos 3t) + \mathcal{L}(e^{-t}\sin t) + \mathcal{L}(t^3)$$

$$= \frac{p}{p^2+4} + \left(\frac{p}{p^2+9}\right)'' + \frac{1}{(p+1)^2+1} + \frac{3!}{p^4} \quad \textbf{(3pts)}$$

II) a) $\frac{p-1}{(p-1)^2+1} \longleftarrow e^t\cos t$

$e^{-2p}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2+1}\right) \longleftarrow \boldsymbol{f(t) = e^{(t-2)}\cos(t-2)}$ **(2pts)**

b) $F(p)=\frac{p-3}{(p+1)^2} = \frac{-4}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)} \longleftarrow \boldsymbol{f(t) = -4te^{-t} + e^{-t}}$

(2pts)