Université De Msila FacultédeTechnologie
Département Génie Civil
Examen de Mathématiques 3Durée 1^h:30^{mn}

ExerciceI (1+1+1=3points)

1) La définition d'une série némurique.voirs le cours. **(1point)**

2) La condition nécéssaire pour la convergence d'une série.$\sum u_n$ est: $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$ **(1point)**

3) La série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{n^2}{n \ln n}$est une série divergente car $\lim\limits_{n\infty} \frac{n^2}{n \ln n} = +\infty \neq 0$ **(1point)**

Exercice II (2points+2points+3points =7points)

1) Eudier la nature des séries suivantes:

a) $\frac{1}{n^2+n} \underset{n\infty}{\simeq} \frac{1}{n^2}$ terme génerale d'une série de Riemann $(2 > 1)$ donc converge, **(1point)**

le theorème d'équivalence nous permis de conclure que la série en question converge. **(1point)**

b) Utilisant la règle de D'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n-1)!}\frac{(n-2)!}{2^n} = \frac{2}{n-1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 < 1 \text{ donc la série en question est convergente.}$$ (

c) On sait que $\ln n \geq 1$ pour tout $n \geq 3$ donc $\frac{1}{\sqrt{n^3}\ln n} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ terme génerale d'une série de Riemann $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$ donc convege **(1point)**,

par conséquent la série $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{1}{\sqrt{n^3}\ln n}$ converge. **(1point)**

Exercice III (2points+3points+1point+5points=11points)

A) l'objectif est de résoudre l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = t^2e^t + 1 \quad \text{pour } t \geq 0 \tag{1}$$

1) On sait que

$$e^t \longleftrightarrow F(s) = \frac{1}{s-1} \text{ de plus } t^2e^t \longleftrightarrow \frac{d^2}{ds^2}F(s) = \frac{2}{(s-1)^3}.$$ **0,75point)**

et

$$1 \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$ **0,25point)**

alors

$$t^2e^t + 1 \longleftrightarrow \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{1}{s} \qquad \textbf{(1point)}$$

2) La fonction $F(s)$ se décompose de la manière suivante:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s-1)^3} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{c}{(s-1)^3} + \frac{d}{(s-1)^2} + \frac{e}{s-1} \tag{2}$$

il s'agit de trouver les constantes a, b, c, d, e dans IR.
Multipliant les deux membres par $(s-1)^3$ on fait $s \longrightarrow 1$ on obtient

$$c = \frac{1}{2}$$

donc ce cas (2) devient

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^3} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{d}{(s-1)^2} + \frac{e}{s-1}$$

c à d

$$-\frac{s+1}{2(s^2+1)(s-1)^2} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{d}{(s-1)^2} + \frac{e}{s-1}$$

de la mème manière $\times (s-1)^2$ et on faire $s \longrightarrow 1$; on trouve

$$d = -\frac{1}{2}$$

alors pour cette valeur de d ,cette dernière identité se transforme à

$$\frac{s}{2(s^2+1)(s-1)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{e}{s-1}$$

de la dernière égalité,$\times (s-1)$ et on faire $s \longrightarrow 1$; on tire

$$e = \frac{1}{4}$$

pour trouver la constante a, multipliant par s et on fait $s \longrightarrow \infty$ alors

$$a = -e = \frac{-1}{4}$$

reste à calculer la constante b, pour cela,il suffit de prendre $s=0$ dans (2) alors

$$b=e=\frac{1}{4}$$

cad

$$F(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s-1\right)^3}=\frac{-1}{4}\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(s-1\right)^3}+\frac{-1}{2\left(s-1\right)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} \tag{0.75}$$

on sait que

$$(0,25\times 5=1,25)\begin{cases} \frac{-1}{4}\frac{s}{s^2+1}\longleftrightarrow \frac{-1}{4}\cos t \\ \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+1}\longleftrightarrow \frac{1}{4}\sin t \\ \frac{1}{4}\frac{1}{s-1}\longleftrightarrow \frac{1}{4}e^t \\ \frac{-1}{2\left(s-1\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}\right)'\longleftrightarrow -\frac{t}{2}e^t \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\left(s-1\right)^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{\left(s-1\right)^2}\right)'\longleftrightarrow \frac{1}{4}t^2e^t \end{cases}$$

alors

$$F(s)\longleftrightarrow \frac{-1}{4}\cos t+\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}t^2e^t-\frac{t}{2}e^t+\frac{1}{4}e^t \qquad (1point)$$

3) comme $y''\longleftrightarrow -\alpha-s\alpha+s^2Y(s)$ où $Y(s)$ est l'image par Laplace de la fonction y. alors on appliquant Laplace à l'equation (1), on obtient

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+1}\left[\alpha+s\alpha+\frac{2}{\left(s-1\right)^3}+\frac{1}{s}\right]$$

comme

$$\frac{\alpha+s\alpha}{s^2+1}\overset{voirs\text{ le cours}}{\longleftrightarrow}\alpha\sin t+\alpha\cos t=y_1(t), \qquad (0,25point)$$

et

$$\frac{2}{\left(s-1\right)^3}\frac{1}{s^2+1}\overset{question2}{\longleftrightarrow}\frac{-1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}t^2e^t-te^t+\frac{1}{2}e^t=y_2(t) \qquad (0,25point)$$

et comme

$$\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s}=\frac{-s}{s^2+1}+\frac{1}{s}\longleftrightarrow -\cos t+1=y_3(t) \qquad (0,25point)$$

alors la solution cherchée est

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \qquad (0,5point)$$

B) Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} e^{-3t} dt$ est l'image par Laplace de la fonction $\dfrac{\sin 2t}{t}$ en $s = 3$ alors $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} e^{-3t} dt = F(3)$ où $F(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} e^{-st} dt$ par dérivation on obtient

$$F'(s) = -\int_0^{+\infty} \sin(2t)\, e^{-st} dt = \frac{-2}{s^2+4} \qquad \textbf{(1,5points)}$$

alors

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} e^{-st} dt = \int_s^{+\infty} \frac{2}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int_s^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \arctan \frac{x}{2}\Big|_s^{+\infty} \\ & \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2} \qquad \textbf{(2points)} \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} e^{-3t} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{3}{2} \qquad \textbf{(1,5points)}$$

Resp: Memou.A