Les matrices :

1. Définition

1.1. Définition

Définition 1.

- Une *matrice* A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.
- Elle est dite de *taille* $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les *coefficients* de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{ou} \quad \left(a_{i,j}\right).$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{1,1} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.

Définition 2.

- Deux matrices sont *égales* lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés *matrices réelles*.

1.2. Matrices particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :

- Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite *matrice carrée*. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

  Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forment la *diagonale principale* de la matrice.
- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée *matrice ligne* ou *vecteur ligne*. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \end{pmatrix}.$$

- De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée *matrice colonne* ou *vecteur colonne*. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}.$$

- La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la *matrice nulle* et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

1.3. Addition de matrices

Définition 3 (Somme de deux matrices).
Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur ***somme*** $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients. Remarque : on note indifféremment a_{ij} où $a_{i,j}$ pour les coefficients de la matrice A.

Exemple

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par contre si} \quad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B' \quad \text{n'est pas définie.}$$

Définition 4 (Produit d'une matrice par un scalaire).
Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice (αa_{ij}) formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

Exemple

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = 2 \quad \text{alors} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est l'***opposée*** de A et est notée $-A$. La ***différence*** $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Exemple

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises :

Proposition 1.
Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.

1. $A + B = B + A$ *: la somme est commutative,*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *: la somme est associative,*
3. $A + 0 = A$ *: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

2. Multiplication de matrices

2.1. Définition du produit

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition 5 (Produit de deux matrices).
Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

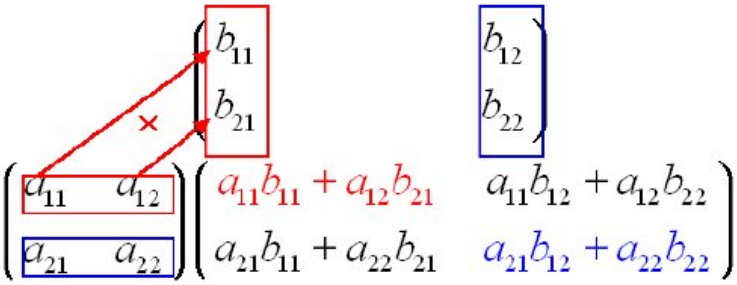
$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ik} b_{kj} + \cdots + a_{ip} b_{pj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ soit } \mathbf{C}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Moyen mnémotechnique



Exemple

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.

1. $A(BC) = (AB)C$ *: associativité du produit,*
2. $A(B+C) = AB + AC$ *et* $(B+C)A = BA + CA$ *: distributivité du produit par rapport à la somme,*
3. $A \cdot 0 = 0$ *et* $0 \cdot A = 0$.

2.5. La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la ***matrice identité*** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2.6. Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la multiplication des matrices est une opération interne : si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in M_n(\mathbb{K})$.
En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.
On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

Définition
Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Exemple
On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$.

La transposition

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Définition
On appelle *matrice transposée* de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :

Théorème

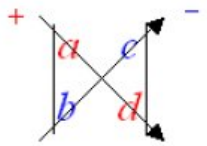
1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$
5. *Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition

Soit $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors $\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=a\times d-b\times c$.

Moyen mnémotechnique

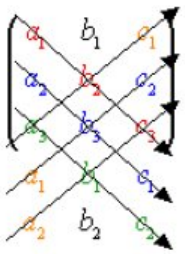


Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Règle de Sarrus

Cette règle n'est valable que pour des matrices carrées d'ordre 3, et n'est absolument pas généralisable. Mieux vaut donc lui préférer la règle générale énoncée dans le paragraphe suivant.

Soit $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.



$$\det(\mathbf{M})=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

Application au déterminant d'ordre 3

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\Delta=a_1X_{11}+a_2X_{21}+a_3X_{31}$ **(colonne 1)**

$\Delta=a_1\Delta_{11}-a_2\Delta_{21}+a_3\Delta_{31}$

$$\Delta=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

Inversion de matrices

Matrice adjointe

Définition

Considérons une matrice carrée **A** d'ordre n, la matrice des cofacteurs X_{ij} des éléments a_{ij} de **A** notée $adj\mathbf{A}$ est appelée **matrice adjointe** de **A** ou **co-matrice** de **A**.

$$adj\mathbf{A} = com\mathbf{A} = \left[X_{ij}\right] = \left[(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}\right]$$

Exemple

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Calculer $adj\mathbf{A}$.

Théorème 1

Soit **A** une matrice carrée d'ordre n. Alors **A** est une matrice inversible si et seulement si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Théorème 2

Soit **A** une matrice carrée quelconque d'ordre n. Alors :

$$\mathbf{A} \times (adj\mathbf{A})^t = (adj\mathbf{A})^t \times \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \times \mathbf{I}_n$$ où $\mathbf{I}_n$ est la matrice identité d'ordre n.

Théorème 3

Soit **A** une matrice carrée quelconque d'ordre n. Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, alors A est inversible et :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,(adj\mathbf{A})^t$$

Cas d'une matrice d'ordre 2

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$. On sait que $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = (ac\text{-}bd)$.

La matrice adjointe de **A** est $adj\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & -d \\ -b & a \end{pmatrix}$: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{(ac-bd)}\begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}$.

Exemple 13

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{A}^{-1}$.

➢ méthode par partition

Exemple

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, telle que $AB = I$ et $BA = I$. Or $AB = I$ équivaut à :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$. Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$. Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité $BA = I$, dont la vérification est laissée au lecteur. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.